Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündoğan

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007 5. Juli 2007

Mathe II

12. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Sternförmige Mengen und exakte DGLen

Ein **sternförmiges** Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Gebiet, das einen festen Punkt $z \in G$ besitzt, so dass die gerade Strecke von z zu jedem anderen Punkt von G noch vollständig in G liegt. Zum Beispiel ist der $\mathbb{R}^2$ sternförmig (wähle z.B. $z = (0,0)$) oder ein Kreis mit Mittelpunkt z oder eben ein „echter“ Stern. Ein nicht-sternförmiges Gebiet ist z.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ oder ein „Autoreifen“.

Eine DGL der Form

$$A(x,y) + B(x,y) \cdot y' = 0 \tag{1}$$

für stetige Funktionen $A, B : G \to \mathbb{R}$ heißt **exakt**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $U : G \to \mathbb{R}$ gibt mit $\frac{\partial U}{\partial x} = A$ und $\frac{\partial U}{\partial y} = B$. In diesem Fall kann man das AWP

$$\begin{aligned} A(x,y) + B(x,y) \cdot y' &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

für $(x_0, y_0) \in G$ lokal eindeutig lösen durch Gleichsetzen $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ und Auflösen nach y, falls das möglich ist. In diesem Fall heißt U eine **Stammfunktion** der DGL (1).

Ob eine DGL exakt ist, lässt sich folgendermaßen erkennen:

Satz: Ist G sternförmiges Gebiet und gilt für die DGL (1) die Bedingung $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, so ist die DGL exakt.

(a) Sei $G = (0,\infty) \times (0,\infty)$, seien $A(x,y) = \frac{2x}{y^3}$ und $B(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ auf G und sei $(x_0, y_0) = (1,1)$. Begründen Sie, warum in diesem Fall die DGL (1) exakt ist und lösen Sie das AWP (2).

(b) Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, seien $A(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ und $B(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ auf G und sei $(x_0, y_0) = (1,1)$. Rechnen Sie nach, dass $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ gilt. Haben wir in diesem Fall eine exakte DGL?

(G 2) Trennbare DGLen

Eine DGL der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{3}$$

für auf Intervallen definierte stetige Funktionen f, g heißt **trennbar** und das zugehörige AWP

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \cdot g(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4}$$

lässt sich, falls $g(y_0) \neq 0$, lokal eindeutig lösen durch

$$y' = f(x) \cdot g(y) \implies \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \implies \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$
$$\implies \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\eta)}\,d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$$

und Auflösen nach y, falls das möglich ist.

(a) Lösen Sie das AWP (4) für $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = 1 + y^2$ und $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

(b) Lösen Sie das AWP

$$\begin{aligned}(1 + e^x) \cdot y \cdot y' &= e^x \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

(G 3) Lineare DGLen und Variation der Konstanten

Eine DGL der Form

$$y' + a(x) \cdot y = f(x) \tag{5}$$

für auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetige Funktionen a, f heißt **lineare DGL 1. Ordnung** und das zugehörige AWP

$$\begin{aligned}y' + a(x) \cdot y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned} \tag{6}$$

lässt sich für *beliebige* y_0 auf dem ganzen Intervall I *global* eindeutig lösen durch

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(\xi)} f(\xi)\,d\xi \right), \text{ wobei } A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt.$$

(a) Lösen Sie das AWP $y' = c$; $y(x_0) = y_0$ für allgemeine feste $c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Lösen Sie das AWP $y' + 5y = 10x + e^{-5x}$; $y(0) = 0$.

(G 4) Extremwertaufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 3y^2 - 10$, die es auf der Menge

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x, y) \leq 0 \right\}$$

mit

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$$

zu minimieren und zu maximieren gilt.

(a) Um was für eine Menge handelt es sich anschaulich bei M? Warum *muss* die Funktion f auf M sowohl ein Maximum als auch ein Minimum annehmen?

(b) Berechnen Sie das Maximum und das Minimum von f auf M. Gehen Sie dabei in zwei Schritten vor: Minimieren Sie f auf der offenen Menge $M^\circ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < 0 \}$ und dann auf der Menge $\partial M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0 \}$.

Hausübungen

(A 34) Exakte DGLen (3+5=8 Punkte)

Begründen Sie jeweils, warum es sich bei den folgenden DGLen um exakte DGLen handelt und lösen Sie die zugehörigen AWPe.

(a) $12xy + 3 + 6x^2 \cdot y' = 0$; $y(1) = 1$.

(b) $2xe^y - 1 + (x^2e^y + 1) \cdot y' = 0$; $y(1) = 0$.

Hinweis: Gehen Sie bei (b) wie bei (a) vor. Wenn Sie die Lösung y nicht explizit bestimmen können, begründen Sie die Existenz von y durch einen geeigneten „großen Satz".

(A 35) Trennbare DGLen (2+3+2+5=12 Punkte)

Lösen Sie die AWPe der folgenden trennbaren DGLen.

(a) $y' = \sin(x)e^y$; $y(0) = 0$.

(b) $y' = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $y(4) = 1$.

(c) $y' = x\sqrt{1 - y^2}$; $y(0) = 0$.

(d) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$; $y(1) = 1$.

(A 36) Lineare DGLen und Variation der Konstanten (3+3+4=10 Punkte)

(a) Lösen Sie das AWP zur folgenden linearen DGL 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} y' + y \cdot \cot(x) &= 5e^{\cos(x)} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das AWP zur folgenden homogenen linearen DGL 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} y'' - 8y' + 7y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

(c) Lösen Sie das AWP zur folgenden homogenen linearen DGL 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} y'' + 12y' + 100y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 6. \end{aligned}$$

Hinweis: Hat man eine **homogene lineare DGL 2. Ordnung**, d.h. eine DGL der Form

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{7}$$

für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, so ist das zugehörige AWP

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \end{aligned} \tag{8}$$

für *beliebige* y_0, y_1 auf ganz $\mathbb{R}$ *global* eindeutig lösbar. Man geht dazu in drei Schritten vor:

1. Man bestimmt die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.
2. Je nachdem, was für Nullstellen λ_1, λ_2 man erhält, wählt man y_1 und y_2:
   (i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \implies y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.
   (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \implies y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.
   (iii) $\lambda = \alpha - i\beta,\ \lambda_2 = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0 \implies y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
3. Die Lösung des AWPs (8) lautet

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

   wobei c_1, c_2 noch zu bestimmende reelle Zahlen sind, die man über die Anfangswertbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_1$ erhält.