**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündogan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 28. Juni 2007

# Mathe II
## 11. Übung

### Gruppenübungen

**(G 1) Die Hessematrix**

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\text{Hess} f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

**(G 2) Der Affensattel**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $Df$ von $f$.

(b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.

(c) Ist $H_f$ positiv definit, indefinit oder negativ definit?

(d) Hat die Funktion $f$ an der Stelle 0 ein Extremum?

**(G 3) Extrema**

(a) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.
Bestimmen Sie das Extremum von $h$. Ist es ein Maximum oder ein Minimum?

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x-2)e^{-x+y}$.
Zeigen Sie, daß $f$ keine Extrema besitzt.
Für welche Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Hesse'sche Matrix $H_f(x,y)$ positiv definit?

**(G 4) Lagrangesche Multiplikatoren**

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

**(G 5) Taylorreihen**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 y + 3y - 2.$$

Entwickeln Sie $f$ in Potenzen von $(x-1)$ und $(y+2)$.

## Hausübungen

**(A 32) Implizite Funktionen (10 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

(a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal nach $y$ auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x,y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion $f$ mit $y = f(x)$ folgt?

(b) Für welche $(x_0, y_0)$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal nach $y$ auflösen, d.h. für welche $(x_0, y_0)$ gibt es eine geeignete Umgebung von $x_0$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x,y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion $f$ mit $y = f(x)$ folgt?

(c) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

(d) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

**(A 33) Extremwerte unter Nebenbedingungen (10 Punkte)**

Gegeben sei eine zylindrische Dose. Bezeichne $r$ den Radius der Dose und $h$ die Höhe. Die Oberfläche $O$ beträgt $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und das Volumen $V(r,h) = \pi r^2 h$. Berechnen Sie die minimale Oberfläche der Dose mit Hilfe einer Lagrange-Funktion bei einem Dosenvolumen von 1000 Volumeneinheiten.