Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündogan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 28. Juni 2007

Mathe II

11. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Die Hessematrix

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\mathrm{Hess} f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

(G 2) Der Affensattel

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung Df von f.

(b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.

(c) Ist H_f positiv definit, indefinit oder negativ definit?

(d) Hat die Funktion f an der Stelle 0 ein Extremum?

(G 3) Extrema

(a) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.
Bestimmen Sie das Extremum von h. Ist es ein Maximum oder ein Minimum?

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x-2)e^{-x+y}$.
Zeigen Sie, daß f keine Extrema besitzt.
Für welche Werte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Hesse'sche Matrix $H_f(x,y)$ positiv definit?

(G 4) Lagrangesche Multiplikatoren

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

(G 5) Taylorreihen

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 y + 3y - 2.$$

Entwickeln Sie f in Potenzen von $(x-1)$ und $(y+2)$.

Hausübungen

(A 32) Implizite Funktionen (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

(a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

(b) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

(c) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

(d) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

(A 33) Extremwerte unter Nebenbedingungen (10 Punkte)

Gegeben sei eine zylindrische Dose. Bezeichne r den Radius der Dose und h die Höhe. Die Oberfläche O beträgt $O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und das Volumen $V(r, h) = \pi r^2 h$. Berechnen Sie die minimale Oberfläche der Dose mit Hilfe einer Lagrange-Funktion bei einem Dosenvolumen von 1000 Volumeneinheiten.