Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner
Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 5. Juni 2007

Mathe II

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Taylorpolynome und Taylorreihen

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils die Taylorpolynome vom Grad 0 bis 3 mit Entwicklungspunkt 1 und, falls möglich, die entsprechenden Taylorreihen. In welchen offenen Umgebungen von 1 konvergieren die Taylorreihen, falls sie existieren, gegen die jeweilige Funktion f_i?

(a) $f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ (b) $f_2(x) = \sin(\pi x)$ (c) $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ (x-1)^4 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$

(G 2) Reelle und komplexe Fourierkoeffizienten

Sei

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

ein reelles Fourierpolynom. Finden Sie seine komplexe Darstellung, d.h. finden Sie $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, N, -N\}$ mit

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}.$$

Zusatzfrage: Sei S_N eine N-te Fourier-Partialsumme für vorgegebenes $N \in \mathbb{N}$. Wie viele Nullstellen in $[-\pi, \pi)$ hat S_N höchstens, wenn nicht alle a_k, b_k null sind?

Hinweis: Es gelten $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ und $e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$. Wie kann man aus diesen Informationen den Sinus und den Kosinus zurückgewinnen?

(G 3) Berechnung einiger Fourierreihen

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden 2π-periodischen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, berechnen Sie ihre reellen und komplexen Fourierkoeffizienten und stellen Sie jeweils die reelle und die komplexe Fourierreihe auf:

(a) $f_1(x) := x$ für $x \in [-\pi, \pi]$. (b) $f_2(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, \pi] \\ -x & \text{für } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$

(c) $f_3(x) := \dfrac{x^2}{4}$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

Hinweis: Die Formeln für die reellen Fourierkoeffizienten sind $a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Die komplexen Koeffizienten erhalten Sie durch $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$ für $k \in \mathbb{Z}$ oder mithilfe der reellen Koeffizienten und **(G 2)**.

(G 4) Konvergenz von Fourierreihen

Betrachten Sie die Fourierreihen der Funktionen f_1, f_2, f_3 aus Aufgabe **(G 3)** hinsichtlich ihrer Konvergenz: An welchen Stellen und nach welchem Satz konvergieren die Fourierreihen jeweils? Betrachten Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktionen gesondert und bestimmen Sie dort auf zwei Arten und Weisen, ob die Fourierreihen konvergieren und wenn ja, mit welchen Grenzwerten.

Hausübungen

(A 23) Konvergenz einer Fourierreihe (10 Punkte)

Sei $d_0, d_1, d_{-1}, d_2, d_{-2}, \ldots$ eine Folge komplexer Zahlen. Man definiere auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit $S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}$ eine Funktionenfolge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, also die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$. Wir nehmen nun weiter an, dass diese *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ konvergiere. Beantworten Sie (mit Begründung!) folgende Fragen:

(a) Ist f notwendigerweise stetig?

(b) Stimmt die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$ mit der Fourierreihe von f überein, d.h. gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

wobei $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$ für alle $k \in \mathbb{Z}$?

(c) Ist die Konvergenz von $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ gegen f auch eine Konvergenz im normierten Vektorraum $(C^0([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2)$, d.h. gilt auch

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x) - f(x)|^2\,dx} = 0?$$

(A 24) Integrale von Sinus- und Kosinus-Funktionen (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)\,dx$$

für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Denken Sie an die komplexe Darstellung des Sinus und des Kosinus.

(A 25) Reihe über den reziproken Quadratzahlen (10 Punkte)

Wir wollen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

berechnen[1] und gehen in drei Schritten vor.

[1]Diese Reihe ist einige der wenigen Reihen, von denen man *auswendig* wissen sollte, dass sie konvergieren.

(a) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{für } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Wenden Sie nun *Parselvals Gleichung*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

an, um $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{(2j+1)^2 \pi^2}$ und danach $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$ zu berechnen.

(c) Wir schreiben $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Begründen Sie, warum

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \frac{S}{4}$$

gilt. Folgern Sie nun $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.