**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 30. Mai 2007

# Mathe II

## 7. Übung

### Gruppenübungen

**(G 1) Offene/Abgeschlossene und kompakte Mengen**

Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ jeweils offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

(a) $\mathbb{N}$ (b) $[0,1)$ (c) $\bigcup_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k},1)$ (d) $M=\{(-1)^n\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

**(G 2) Ein unendlichdimensionaler Banachraum**

Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel in dem unendlichdimensionalen Banachraum $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

**(G 3) Potenzreihen**

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x)^n$, $x\in\mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$. (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n^2}z^n$, $x\in\mathbb{C}$.

Für welche Werte sind die Reihen konvergent, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sind sie gleichmäßig konvergent? Machen Sie sich jeweils klar, um welche Funktionenfolge es sich dabei handelt.

**(G 4) Konvergenz von Funktionenfolgen**

Für alle $n\in\mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $D:=D(f_n)=[0,1]$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x):=\begin{cases}1-2^nx & \text{, falls } 0\le x\le\frac{1}{2^n}\\ 0 & \text{, falls } \frac{1}{2^n}<x\le 1\end{cases}$$

definiert. Skizzieren Sie $f_1$ und $f_2$ sowie qualitativ $f_n$ und untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hinsichtlich punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz auf $D$.

**(G 5) Taylorentwicklung**

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x)=\ln x$ um den Punkt 1 und deren Konvergenzradius.

### Hausübungen

**(A 20) Potenzreihen (10 Punkte)**

(a) Wir definieren $\binom{\lambda}{k}:=\frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}$ für beliebige $\lambda\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$. Berechnen Sie den Konvergenzradius $R$ der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty}\binom{\lambda}{k}z^k$. Hängt $R$ von $N$ ab?

(b) Es sei $\varphi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda}{k} z^k$. Beweisen Sie $\varphi(z) = (1+z)^\lambda$.

*Hinweis:* Zeigen Sie $(1+z)\varphi'(z) = \lambda\varphi(z)$. Benutzen Sie die Aussage "$f'(z) = g'(z) \Rightarrow f(z) = g(z) + c$".

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$ im Nullpunkt.

(d) Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung des Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um den Nullpunkt.

*Hinweis:* Bestimmen Sie zuerst die Ableitung des Arcustangens und benutzen Sie Teilaufgabe (c).

### (A 21) Potenzreihen (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (k + \sin(k))(x-2)^k$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} (x-1)^{5k}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

### (A 22) (10 Punkte)

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an. Beweisen Sie, daß diese Funktion beliebig oft differenzierbar ist und berechnen Sie die Taylorreihe $T_f$ um den Punkt 0. Stimmen $T_f$ und $f$ auf einer Nullumgebung $B_\epsilon(0)$ $(\epsilon > 0)$ überein?