Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 23. Mai 2007

Mathe II
6. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Konvergenz

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im normierten Raum V und $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Konvergiert auch die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$?

(b) Es sei sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Raum V mit konvergenter Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Konvergiert dann auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(G 2) Normen

Es sei $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$ gegebene **p-Norm** $(p \geq 1)$. Für $p = \infty$ setzt man $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$.

(a) Skizziere die Einheitskugeln bezüglich der 1-Norm, der 2-Norm und der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Beweisen Sie, daß die obigen 3 Normen äquivalent sind, d.h. daß es für alle $p, p' \in \{1, 2, \infty\}$ Konstanten c und d gibt, welche die Gleichung $c \cdot \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p|} \leq d \cdot \|\cdot\|_p$ erfüllen.

(G 3) Potenzreihen

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_n x^n$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Konvergiert die Reihe punktweise auf dem Intervall $[0, 1]$? Konvergiert sie dort gleichmäßig?

(c) Konvergiert die Reihe punktweise auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$? Konvergiert sie dort gleichmäßig?

(G 4) Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Bestimmen Sie für die Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert bezüglich punktweiser Konvergenz und entscheiden Sie, ob sie gleichmäßig konvergieren:

(a) $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$ (b) $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} x^j$

(G 5) Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} x - n & \text{falls} \quad n \leq x \leq n+1 \\ n + 2 - x & \text{falls} \quad n+1 \leq x \leq n+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die ersten Folgeglieder.

(b) Konvergiert die Folge f_n punktweise oder sogar gleichmäßig?

Hausübungen

(A 17) Funktionenräume (10 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so daß $a < b$ gilt. Auf dem Vektorraum $C([a,b], \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$ definieren wir eine Abbildung $\|\cdot\|_\infty : C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

(a) Warum existiert das Supremum in obiger Definition?

(b) Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist.

(c) Es sei P die Menge aller Polynomfunktionen auf $[a,b]$. Ist P ein Untervektorraum von $C([a,b], \mathbb{R})$?

(d) Beweisen Sie, daß die Einschränkung $\exp|_{[a,b]}$ nicht in P liegt.

(e) Ist P abgeschlossen in $C([a,b], \mathbb{R})$?

Hinweis: Benutze (d)

(A 18) Potenzreihen (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^n \cdot (x-2)^n \ .$$

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)] \quad , \ x \in \mathbb{R},$$

auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

(A 19) Punktweise/Gleichmäßige Konvergenz (10 Punkte)

Wir betrachten die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ mit } f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in (-1,1)$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $\lambda \in (0,1)$ die Konvergenz auf dem Intervall $[-\lambda, \lambda]$ sogar gleichmäßig ist.