**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 23. Mai 2007

# Mathe II
## 5. Übung

### Gruppenübungen

**(G 1) Spiegelungen**

Es sei $g$ die Gerade durch den Ursprung, die mit der positiven $x$-Achse im $\mathbb{R}^2$ im Gegenuhrzeigersinn den Winkel $\gamma \in [0, 2\pi]$ einschließt und $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalspiegelung an der Geraden $g$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $g$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatix $[\sigma_g]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}$ zur Abbildung $\sigma_g$.

**(G 2)**

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Wie sehen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden linearen Abbildungen aus:

(a) Spiegelung an der von $u$ und $v$ aufgespannten Ebene,

(b) Projektion auf die von $u$ und $v$ aufgespannte Ebene,

(c) Drehung um die Achse, die von $v$ erzeugt wird.

**(G 3)**

Es sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiterhin sei $A : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit adjungierter Abbildung $A^*$ (,d.h. es gilt $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$). Beweisen Sie $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ und $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.

**(G 4) Direkte Summen/Eigenräume**

Es sei $A : V \to V$ eine diagonalisierbare $\mathbb{K}$-lineare Selbstabbildung des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V$. Beweisen Sie, daß die Summe der eigenräume

$$\sum_{\lambda \mathrm{istEigenwertvonA}} \operatorname{Eig}(A, \lambda)$$

direkt ist und daß $V = \oplus_\lambda \operatorname{Eig}(A, \lambda)$ gilt.

**(G 5) Quadriken**

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

## Hausübungen

**(A 13) Quadriken (10 Punkte)**

Für die Quadrik $Q$ gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0\},$$

Welche geometrischen Objekte treten für $n = 2$ und $n = 3$ auf, wenn alle $\lambda_i$ ungleich Null sind?

**(A 14) (10 Punkte)**

Berechnen Sie die Signatur der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & -2i & 0 \\ i & 2 & 1 & 0 \\ 2i & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(A 15) (10 Punkte)**

Es seien $A, B : V \to V$ diagonalisierbare $\mathbb{K}$-lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V$.

(a) Ist $A \circ B$ diagonalisierbar?

(b) Ist $A \circ B$ im Falle $A \circ B = B \circ A$ diagonalisierbar?