Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 8. Mai 2007

Mathe II

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Basen

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bei welchen handelt es sich um ein Erzeugendensystem und bei welchen um eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(G 2)

Berechne eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des durch $\langle x, y \rangle = x^T A y$ mit
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ definierten Skalarprodukts.

(G 3) Determinanten und Basiswechsel

Die lineare Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_3$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}$

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ von L bezüglich der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ und vergleichen Sie sie mit $\det[L]_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}$. Erklären Sie Ihr Ergebnis.

(G 4)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellwertigen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(G 5)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Hausübungen

(A 10) Basen (10 Punkte)

Für $a = 2$ und $a = -2$ betrachte man die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie in beiden Fällen die Eigenwerte der Matrix A.

(b) Im Fall $a = 2$ besitzt A Eigenvektoren, die eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bilden, d.h. jeweils Länge 1 haben und aufeinander senkrecht stehen. Bestimmen Sie eine solche Basis und verifizieren Sie, daß für die Matrix $U = (u_1, u_2, u_3)$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind. (Beachten Sie, daß Matrizen, deren Spaltenvektoren Länge 1 haben und aufeinander senkrecht stehen, orthogonale Matrizen sind, d.h. daß $U^{-1} = U^T$ gilt.)

(c) Gibt es auch im Fall $a = -2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

(A 11) Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

(A 12) (10 Punkte)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Matrix S an, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist und berechnen Sie $S^{-1}AS$. Gibt es auch einer orthogonale solche Matrix S?