Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 7. Mai 2007

Mathe II

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Darstellungsmatrix

Es sei $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ einer reelle $m \times n$-Matrix. Durch $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ wird eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert.

(a) Die Bilder $L(\vec{e_j})$ der Basisvektoren sind Linearkombinationen $\sum_i c^i_j \vec{e}_i$ der Basisvektoren $\vec{e}_i \in \mathcal{K}_m$. Geben Sie die Koeffizienten c^i_j mit Hilfe der Matrix M an.

(b) Geben sie die Matrix $[L]^{\mathcal{K}_m}_{\mathcal{K}_n}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_n$ und $\mathcal{K}_m$ an.

(G 2) Basiswechsel

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ zwei reelle Vektorräume. Die Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$ definieren zwei Isomorphismen $\phi_{\mathcal{K}_m} : V \to \mathbb{R}^m$ und $\phi_{\mathcal{K}_n} : W \to \mathbb{R}^n$ (vergl. Vorlesung). Weiterhin sei durch die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vermöge $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ eine lineare Abbildung $L : V \to W$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]^{\mathcal{K}_n}_{\mathcal{K}_m}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$.

(b) Es seien $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ zwei weitere Basen von V bzw. W. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $T = [\phi_{\mathcal{K}_3} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2}$ und $S = [\phi_{\mathcal{K}_2} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{K}_2}$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(G 3) Vandermonde-Determinante

Die **Vandermonde Matrix** $V(x_1, \dots, x_n)$ für ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ ist durch

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Vandermonde-Matrizen $V(x_1, x_2)$ und $V(x_1, x_2, x_3)$. Schreiben Sie das Ergebnis als Produkt von Differenzen.

(b) Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Vandermonde-Determinante $\det V(x_1, \ldots, x_n)$ auf und beweisen Sie diese.

Hinweis: Erzeugen Sie durch Spaltenoperationen möglichst viele Nullen in der ersten Zeile und entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile.

(G 4)

Es sei $v, e \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $\|e\| = 1$. Weiter sei $a := \langle v, e \rangle e$ und $b := v - a$.

Zeigen Sie, daß a und b orthogonal sind, und fertigen Sie eine Skizze an. Welche geometrische Bedeutung hat das Skalarprodukt $\langle v, e \rangle$?

(G 5)

Führe das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren mit den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus. Welches Problem tritt dabei auf und was ist dessen Ursache?

Hausübungen

(A 7) (10 Punkte)

Konstruieren Sie eine Orthogonalbasis des $\mathbb{C}^3$, in der der Vektor $(1-i, 1+i, 2i)^T$ vorkommt.

(A 8) Determinanten (8 Punkte)

Für $n \geq 2$ berechne man

$$f(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & x & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & x \end{pmatrix}$$

(die Matrix sei in $\mathbb{R}^{n \times n}$) und gebe $f(0)$ sowie alle Nullstellen von f an.

(A 9) (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $B_\lambda = A - \lambda E_2$. Berechne Werte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so daß $\det(B_{\lambda_i}) = 0$.

(b) Finde Vektoren v_1 und v_2, die $V_1 := \ker B_{\lambda_1}$ bzw. $V_2 := \ker B_{\lambda_2}$ erzeugen. Zeige, daß V die direkte Summe von V_1 und V_2 ist.

(c) Die Matrix A beschreibt eine lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis. Berechne die Matrix dieser Abbildung bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

(d) Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwei Vektoren, so daß

$$L(v) = \lambda v \qquad L(w) = \mu w \qquad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \neq \mu$$

Bilden die Vektoren v, w immer eine Basis von $\mathbb{R}^2$?