Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 23. April 2007

Mathe II

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Basiswechsel

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Standardbasis $\mathcal{K}_2$ (auch kanonische Basis genannt), die Basis $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sowie den Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, der durch die Matrix

$$[\phi]_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2} := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Bestimme $[\phi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Gegeben seien weiterhin Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ durch $[v]_{\mathcal{K}_2} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $[w]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $[v]_{\mathcal{B}}$ und $[w]_{\mathcal{K}_2}$ sowie $[\phi(v)]_{\mathcal{B}}$ und $[\phi(w)]_{\mathcal{K}_2}$.

(G 2) Skalarprodukt/Hermitesches Skalarprodukt

(a) Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die folgende Gleichheit:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2.$$

(b) Es sei V ein unitärer Vektorraum. Beweisen Sie die folgende Gleichheit:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}||x+y||^2 - \frac{1}{4}||x-y||^2 - \frac{i}{4}||x+iy||^2 + \frac{i}{4}||x-iy||^2.$$

(G 3) Orthonormalisierung

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Konstruiere eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeige, daß der Vektor $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}^T$ in der lineare Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil a konstruierten Basis dar.

(G 4)

Berechnen Sie für jede reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

1. durch Spalten- und Zeilenumformungen.
2. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.
3. mit der Regel von Sarrus (falls möglich).

Hausübungen

(A 4) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß durch $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(B^T A)$ der Raum $\mathbb{R}^{m\times n}$ der reellen $m \times n$- Matrizen mit einem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet wird.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Einheitsmatrix E_2 und der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(A 5) (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 auf dem Einheitsintervall. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 q(x)q(x)\,dx$$

.

Hinweis: Sie können mit der Basis $1, x, x^2$ beginnen.

(A 6) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$