Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Fels
Martin Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 18. April 2007

Mathe II

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (2y, x + y)$

(c) $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ mit $(f(u))(x) = u'(x)$

Kommentar zur Notation: $C^1(\mathbb{R}))$ steht für den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $C^0(\mathbb{R})$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(G 2)

Skizzieren Sie die Mengen $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le 1 \text{ und } 0 \le x_2 \le 4\}$ und $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ sowie ihre Bilder unter den folgenden linearen Abbildungen:

(a) $f_1(x_1, x_2) = (5x_1, 5x_2)$ (b) $f_2(x_1, x_2) = (7x_1, x_2)$ (c) $f_3(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$

(G 3)

Es sei $\mathbb{R}[x]_3$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynome höchstens dritten Grades.

(a) Ist die Ableitung $p \mapsto p'$ eine lineare Abbildung auf $\mathbb{R}[x]_3$? (Beweis!)

(b) Geben sie für die 2-fache Ableitung $p \mapsto p''$ die beschreibende Matrix bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ an.

(G 4)

Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $\phi((1, -1)) = (1, 0)$ und $\phi((1, 2)) = (0, 1)$ gegeben. Berechnen Sie $\phi((2, 1))$ sowie den Vektor v mit $\phi(v) = (2, 1)$.

(G 5)

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten beschreibt. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix, d.h. ermitteln Sie diejenige Matrix A_φ, bezüglich der

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bestimmt. Ermitteln Sie erneut die Matrix A_ψ welche die Abbildung ψ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(c) Bestimmen Sie die zu $\psi \circ \varphi$ gehörige Abbildungsmatrix.

Hausübungen

(A 1) (10 Punkte)

Es sei $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f_1(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x-2 \\ 3y \end{pmatrix}$ (b) $f_2(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-x \end{pmatrix}$ (c) $f_3(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $f_4(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Matrizen bezüglich der Standardbasis zu den linearen unter den obigen Abbildungen.

(A 2) (12 Punkte)

Die komplexen Vektorräume $\mathbb{C}^n$ sind auf natürliche Weise $\mathbb{R}$-Vektorräume. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ z.B. bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{1, i\}$. So besitzt die komplexe Zahl $3-5i$ bezüglich der obigen Basis die Koordinaten $(3, -5)$. Die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto xi$, die eine komplexe Zahl mit i multipliziert, wird bezüglich dieser Basis durch die Abbildungsmatrix

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(a) $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + y$ (b) $f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto xy$ (c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto \overline{x}$

(d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto cx$

Hierbei ist $c \in \mathbb{C}$ und $\overline{x} = \overline{a + bi} := a - bi$ bezeichnet die komplex Konjugierte von x.

Geben Sie bei den Abbildungen, die $\mathbb{R}$-linear sind, die Abbildungsmatrix (bezüglich der Standardbasis $\{1, i\}$ für $\mathbb{C}$ bzw. $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ für $\mathbb{C}^2$) an.

(A 3) (12 Punkte)

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen $\mathcal{B} := \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ bzw. $\mathcal{C} := \{(0, 1), (1, 0)\}$. Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sei bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$[\psi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die Matrix, welche ψ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{K}_3$ von $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

(b) Weiterhin sei ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{\mathcal{K}_3} := (7, 8, 9)$ gegeben. Bestimmen Sie das Bild $[\psi(v)]_{\mathcal{C}}$.