

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Mengen und Mengenoperationen

Unter einer *Menge* versteht man die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (sog. *Elemente* der Menge) zu einem Ganzen.

Eine Menge kann man

- durch Aufzählen ihrerer Elemente, oder
- durch Angabe einer Eigenschaft

$$M = \{x | x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

beschreiben.

Beispiel 1.1.1. (a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen.

(b) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

(c) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der ganzen Zahlen.

(d) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, die Menge der rationalen Zahlen.

(e) $\mathbb{R} = \{x | x \text{ ist reelle Zahl}\}$, die Menge der reellen Zahlen. Bei den reellen Zahlen handelt es sich um Zahlen mit evtl. nicht abbrechender Dezimalbruchdarstellung, wie z.B. $12,72531\dots$ oder $-3,1415\dots$

Notation 1.1.2. • $a \in M$ bedeutet a ist Element von M .

- $a \notin M$ bedeutet a ist kein Element von M .

Beispiel 1.1.3.

$$1, 5 \notin \mathbb{N}; 1, 5 \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Definition 1.1.4. Für die *leere Menge* - die Menge, die kein Element enthält - schreiben wir das Symbol \emptyset .¹

Sind A, B Mengen, so schreiben wir:

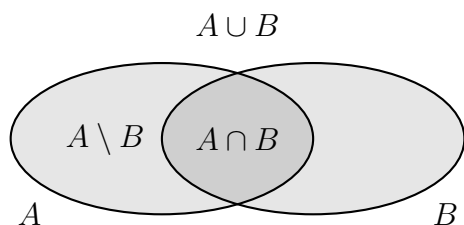
- (a) $A = B$, falls beide Mengen die gleichen Elemente enthalten.
- (b) $A \subseteq B$, falls jedes Element von A auch in B enthalten ist. („ A ist Teilmenge von B .“).

Beispiel 1.1.5.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \{1, \sqrt{2}, 3\} \not\subseteq \mathbb{N}$$

Definition 1.1.6. Für Mengen A und B definieren wir:

- (a) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$, die Vereinigung der Mengen A und B .
- (b) $A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$, der Schnitt der Mengen A und B .
- (c) $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$, die Differenz der Mengen A und B .



Definition 1.1.7. Sei A eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von A heißt die Potenzmenge von A . Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{P}(A)$, d.h.

$$\mathcal{P}(A) = \{M | M \subseteq A\}.$$

Beispiel 1.1.8. (a) $\mathcal{P}(\{1, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

(b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Satz 1.1.9. Seien A, B und C Mengen. Dann gelten die de Morgan'schen Regeln. D.h. es gilt:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

¹ \emptyset wird in der Literatur auch als Zeichen für das arithmetische Mittel verwendet. In dieser Vorlesung steht es aber immer für die leere Menge.

$$(b) A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Definition und Satz 1.1.10. Sei I eine Menge. Für jedes $i \in I$ sei eine Menge B_i gegeben. Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} B_i &= \{x \mid \text{für mindestens ein } i \in I \text{ gilt: } x \in B_i\} \\ \bigcap_{i \in I} B_i &= \{x \mid \text{für alle } i \in I \text{ gilt: } x \in B_i\}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$(a) A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$$

$$(b) A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

1.2 Einige nützliche Abkürzungen

Definition 1.2.1. Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \quad (\text{„n-Fakultät“}) \\ 0! &= 1. \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.2.

$$1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definition 1.2.3. Ist $a_i \in \mathbb{R} (i \in \mathbb{Z})$, d.h. für jedes $i \in \mathbb{Z}$ sei $a_i \in \mathbb{R}$, und $k, n \in \mathbb{Z}, k \leq n$. So wird definiert:

$$\sum_{i=k}^n a_i = (a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n).$$

(„Summe der a_i für i von k bis n “).

Beispiel 1.2.4. (a) $\sum_{i=2}^5 a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$(b) \sum_{i=-1}^3 a_i = a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$(c) \sum_{i=0}^4 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$