Vorlesung am 08.12.2008

Ist $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt jede Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

reelle Zufallsvariable.

Diese beschreibt ein Zufallsexperiment mit unbestimmten Ergebnis $X(\omega)$.

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis dieses Zufallsexperiment in der Menge A landet, gegeben durch

$$\mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}[X \in A] := \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \, : \, X(\omega) \in A\}).$$

Hierbei ist $\mathbf{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und heißt die **Verteilung von X**.

Bei diskret verteilten Zufallsvariablen mit Zähldichte legen wir für jede natürliche Zahl k (einschließlich der Null) die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}[X = k] \in [0, 1]$$

fest, dass beim Zufallsexperiment mit unbestimmten Ergebnis $X(\omega)$ die Zahl k als Ergebnis auftritt.

Anschließend bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit, dass das unbestimmte Ergebnis in einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ zu liegen kommt, als Summe der Wahrscheinlichkeiten aller natürlichen Zahlen in A:

$$\mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}[X \in A] := \sum_{k \in A \cap \mathbb{N}_0} \mathbf{P}[X = k].$$

Die Folge $(\mathbf{P}[X = k])_{k \in \mathbb{N}_0}$ heißt **Zähldichte** der Verteilung von X.

Wichtige Beispiele für diskrete Verteilungen mit Zähldichte sind:

1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Bei einer **binomialverteilten ZV mit Parametern n und p** (kurz: $b(n, p)$-verteilte ZV) wird

$$\mathbf{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } k \in \{0, \ldots, n\}, \mathbf{P}[X = k] = 0 \text{ für } k > n$$

   gesetzt und alle weiteren Wahrscheinlichkeiten werden wie oben berechnet.

2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Bei einer **Poisson-verteilten ZV mit Parameter λ** (kurz: $\pi(\lambda)$-verteilte ZV) wird

$$\mathbf{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

   gesetzt und alle weiteren Wahrscheinlichkeiten werden wie oben berechnet.

Bei einer stetig verteilten Zufallsvariablen mit Dichte wählen wir eine sogenannte Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{f(x) \geq 0} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x)\,dx = 1},$$

und bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass das unbestimmte Ergebnis in einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ zu liegen kommt, als Flächeninhalt zwischen der Dichte und der x-Achse im Bereich der Menge A:

$$\mathbf{P_X(A) := P[X \in A] := \int_A f(x)\,dx}.$$