Vorlesung am 24.11.2008

Ein **Zufallsexperiment** (ZE) hat ein unbestimmtes Ergebnis und kann im Prinzip beliebig oft unter den gleichen Bedingungen wiederholt werden.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt Grundmenge, Teilmengen davon heißen Ereignisse, die eintreten, falls das Ergebnis des ZE in der Teilmenge liegt.

Beobachtung aus der Praxis:

Führt man ein Zufallsexperiment unbeeinflusst voneinander immer wieder durch, so nähert sich die relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses A für große Anzahlen von Wiederholungen einer festen Zahl

$$\mathbf{P}(A) \in [0, 1]$$

(genannt **Wahrscheinlichkeit von A**) an.

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Paar $(\Omega, \mathbf{P})$, wobei Ω eine nichtleere Menge ist und $\mathbf{P}$ Ereignissen $A \subseteq \Omega$ Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(A)$ so zuweist, dass gilt:

(i) Für alle $A \subseteq \Omega$ gilt $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$.

(ii) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(iii) Für alle $A \subseteq \Omega$ gilt: $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$. (Hierbei $\bar{A} = \Omega \setminus A$).

(iv) Für alle $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

(v) Für alle $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \qquad \text{(sog. } \sigma\text{–Additivität).}$$

Im Wahrscheinlichkeitsraum gilt auch:

- Für $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$ gilt immer:

$$\mathbf{P}\left(B \setminus A\right) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A).$$

- Für $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$ gilt immer:

$$\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B).$$

- Für beliebige $A, B \subseteq \Omega$ gilt immer:

$$\mathbf{P}\left(A \cup B\right) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Frage aus der Vorlesungsumfrage:

Wozu machen wir den ganzen Quatsch bzw. was sind denn davon die Anwendungen?

Ganz einfach:

Ich stelle ihnen gerade ein mathematisches Modell des Zufalls vor. Zur Zeit (und auch noch in den nächsten 4 Vorlesungen einschließlich der heutigen Vorlesung) diskutieren wir Eigenschaften dieser Modelle.

Danach bringe ich Ihnen dann bei, wie sie solche Modelle an beobachtete Daten anpassen und dann innerhalb des Modells **Rückschlüsse ziehen können, die über den beobachteten Datensatz hinausgehen!**