Vorlesung am 12.01.2009 und am 19.01.2009

Ist X diskrete Zufallsvariable, die mit Wahrscheinlichkeit Eins nur einen der Werte x_1, x_2, ... annimmt, so gilt

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbf{P}[X = x_k].$$

Ist X eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte f, so gilt

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Allgemeiner gilt für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in den obigen beiden Fällen:

$$\mathbf{E}h(X) = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) \cdot \mathbf{P}[X = x_k] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx.$$

Beispiele:

- Für eine $b(n,p)$–verteilte ZV X gilt

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \cdots = n \cdot p$$

  und

$$\mathbf{E}X^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Für eine $\pi(\lambda)$–verteilte ZV Y gilt

$$\mathbf{E}Y = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \cdots = \lambda.$$

- Für eine $N(\mu, \sigma^2)$–verteilte ZV Z gilt

$$\mathbf{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx = \cdots = \mu.$$

und

$$\mathbf{E}Z^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx.$$

Wichtige Eigenschaften des Erwartungswertes

Seien X, Y zwei reelle ZVen und sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Der Erwartungswert einer Summe ist Summe der einzelnen Erwartungswerte:

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

- Der Erwartungswert des Vielfachen einer ZV ist gleich dem Vielfachen des Erwartungswertes der ZV:

$$\mathbf{E}(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot \mathbf{E}X.$$

- Beeinflussen sich Zufallsvariablen gegenseitig nicht (d.h. sind sie **unabhängig**), so ist der Erwartungswert eines Produktes gleich dem Produkt der einzelnen Erwartungswerte:

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y.$$

Seien X, Y eine reelle ZVen und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Die Varianz von X beschreibt die mittlere quadratische Abweichung zwischen dem Wert von X und dem Erwartungswert von X:

$$V(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)^2\right).$$

Sie macht eine Aussage darüber, wie stark ein zufälliger Wert um seinen "mittleren Wert" schwankt.

Für sie gilt die Formel

$$V(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2.$$

Wichtige Rechenregeln:

- Die Varianz des Vielfachen einer ZV ist das Vielfache zum Quadrat multipliziert mit der Varianz der ZV:

$$V(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot V(X).$$

- Die Varianz ändert sich nicht, wenn man eine Konstante zu der ZV dazuaddiert:

$$V(X + \beta) = V(X).$$

- Beeinflussen sich Zufallsvariablen gegenseitig nicht (d.h. sind sie unabhängig), so ist die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen:

$$V(X + Y)) = V(X) + V(Y).$$

	(Zähl-)Dichte	Erwartungswert	Varianz
$b(n,p)$	$\mathbf{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $k \in \{0,1,\dots,n\}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
$\pi(\lambda)$	$\mathbf{P}[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ für $k \in \{0,1,\dots\}$	λ	λ
$U[a,b]$	$f(x) = 1/(b-a)$ für $a \leq x \leq b$ $f(x) = 0$ sonst	(a+b)/2	. . .
$\exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ für $x \geq 0$ $f(x) = 0$ sonst	$1/\lambda$	. . .
$N(a,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x-a)^2}{2\sigma^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$	a	σ^2