Übungen zur Vorlesung
Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

G9. Adjungierten-Methode für ein semilineares Randsteuerungsproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ oder $n = 3$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned}
\min_{y \in H^1(\Omega),\, u \in L^4(\partial\Omega)} \quad & f(y,u) := \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \\
\text{u.d.N.} \quad & -\Delta y + y = 0 \quad \text{auf } \Omega, \\
& \frac{\partial y}{\partial \nu} + y|y| = u \quad \text{auf } \partial\Omega, \\
& a \le u \le b \quad \text{auf } \partial\Omega
\end{aligned}$$

mit $a, b \in L^4(\partial\Omega)$, $y_d \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$.

Hinweis: Die Einbettung $H^1(\Omega) \subset L^4(\partial\Omega)$ ist stetig und für $1 \le p < 4$ ist die Einbettung $H^1(\Omega) \subset\subset L^p(\partial\Omega)$ kompakt.

a) Geben Sie die schwache Formulierung der Zustandsgleichung an. Die zugehörige Operatorgleichung sei $E(y,u) = 0$ mit $E : Y \times U \to Z$. Geben Sie geeignete Y, U, Z an.

b) Beweisen Sie, dass das Problem eine optimale Lösung hat.

c) Zeigen Sie, dass $E : Y \times U \to Z$ stetig F-differenzierbar ist. Leiten Sie die linearisierte Zustandsgleichung in schwacher und starker Form her.

d) Begründen Sie die stetige F-Differenzierbarkeit des reduzierten Zielfunktionals $\hat{f}(u) = f(y(u), u)$.

e) Leiten Sie die adjungierte Gleichung in schwacher und starker Form her.

f) Geben Sie die Adjungierten-basierte Darstellung der Ableitung der reduzierten Zielfunktion an.

G10. Notwendige Optimalitätsbedingung 2. Ordnung

Sei W ein Banach-Raum und $\mathcal{S} \subset W$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Die Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ sei definiert auf einer offenen Umgebung $V \subset W$ von $\mathcal{S}$. Sei $\bar{w}$ eine lokale Lösung von

$$\min_{w \in \mathcal{S}} f(w) \quad \text{u.d.N.} \quad w \in \mathcal{S},$$

in der f zweimal G-differenzierbar ist.

a) Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\langle f'(\bar{w}), w - \bar{w}\rangle_{W^*,W} \ge 0 \quad \forall\, w \in \mathcal{S}, \tag{O1}$$

$$\langle f''(\bar{w})(w - \bar{w}), w - \bar{w}\rangle_{W^*,W} \ge 0 \quad \forall\, w \in \mathcal{S} \text{ mit } \langle f'(\bar{w}), w - \bar{w}\rangle_{W^*,W} = 0. \tag{O2}$$

b) Sei nun $W = L^2(\Omega)$ und $\mathcal{S} = \{w \in W : a \le w \le b\}$ mit $a, b \in W$, $a < b$ fast überall. Weiter sei $\nabla f(\bar{w}) \in L^2(\Omega)$ die Darstellung von $f'(\bar{w}) \in W^*$ bezüglich des L^2-Skalarprodukts. Wie lässt sich (O1) äquivalent als punktweise Bedingungen (fast überall) an $\nabla f(\bar{w})$ schreiben?

Bitte wenden!

H4. Existenz und Ableitungsberechnung

Sei ähnlich wie in **H3** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned}\min_{y\in H^1(\Omega),\, u\in L^2(\Omega)} \quad & \frac{1}{2}\|y-y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y-y_r\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \text{u.d.N.} \quad & -\Delta y + y + y^3 = u \qquad \text{auf } \Omega, \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \\ & a \le u \le b \qquad \text{auf } \Omega\end{aligned}$$

mit $a, b \in L^2(\Omega)$, $a < b$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $y_r \in L^2(\partial\Omega)$ und $\alpha > 0$. Setze $Y = H^1(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$.

Die partielle Differentialgleichung ist in schwacher Form zu verstehen.

a) Leiten Sie die adjungierte Gleichung in schwacher und starker Form her.

b) Geben Sie die Adjungierten-basierte Darstellung der Ableitung der reduzierten Zielfunktion $\hat{f}(u) := f(y(u), u)$ an.

c) Nutzen Sie **G10**, (O1) um eine notwendige Optimalitätsbedingung 1. Ordnung anzugeben.

d) Geben Sie im Detail an, wie man $\hat{f}''(u)s$ für eine Richtung $s \in U$ berechnen kann.

Abgabetermin für Hausaufgaben: Montag, 02.07.07 **in der Vorlesung**.