Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2007
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich — Blatt 3

Übungen zur Vorlesung
Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

G7. Differenzierbarkeit

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig Fréchet-differenzierbar sind. Leiten Sie hierzu zunächst formal ab und weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um die Fréchet-Ableitung handelt:

a) $F : y \in L^2(\Omega) \mapsto \|y - y_d\|_{L^2}^2 \in \mathbb{R}$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

b) $G : y \in L^6(\Omega) \mapsto y^3 \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.
Hinweis: Aus der Hölder-Ungleichung folgt für alle $1 \le s \le \infty, 1 \le p \le \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

$$\|uv\|_{L^s} \le \|u\|_{L^{ps}}\|v\|_{L^{qs}}, \quad \forall\, u \in L^{ps},\ v \in L^{qs}.$$

G8. Reduzierte Zielfunktion für ein linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ oder $n = 3$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{y\in H^1(\Omega),\ u\in L^2(\partial\Omega)} \quad & \frac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -\Delta y + y = g \qquad \text{auf } \Omega, \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = u \qquad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $g \in L^2(\Omega)$, $y_d \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Setze $Y = H^1(\Omega)$, $U = L^2(\partial\Omega)$.

a) Geben Sie die schwache Formulierung der Zustandsgleichung an und schreiben Sie das Problem abstrakt in der Form

$$\min_{y\in Y,\ u\in U} f(y,u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y,u) = 0, \quad u \in U_{ad}$$

mit $E : Y \times U \to Y^*$.

b) Begründen Sie, dass zu jedem $u \in U$ ein eindeutiges $y = y(u) \in Y$ existiert mit $E(y(u), u) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass $E : Y \times U \to Y^*$ und $f : Y \times U \to \mathbb{R}$ stetig Fréchet-differenzierbar sind. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f und E und begründen Sie, dass der Operator $E'_y(y, u)$ beschränkt invertierbar ist.
Tip: Benutzen Sie **G7**.

d) Warum ist die Abbildung $u \in U \mapsto y(u) \in Y$ stetig Fréchet-differenzierbar? Wie lautet die Ableitung $y'(u)$? Begründen Sie, dass das reduzierte Zielfunktional $\hat{f} : u \in U \mapsto f(y(u), u)$ stetig Fréchet-differenzierbar ist.

e) Wie kann man $y'(u)h$ durch Lösen einer PDE berechnen? Wie erhält man nun die Richtungsableitung $d\hat{f}(u, h) = \hat{f}'(u)h$?

f) Sei $(\bar{y}, \bar{u})$ eine Lösung des Optimierungsproblems. Was gilt dann für $d\hat{f}(\bar{u}, h)$, $h \in L^2$? Welche Optimalitätsbedingung ergibt sich?

Bitte wenden!

H3. Ein semilinear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{y \in H^1(\Omega),\, u \in L^2(\Omega)} \quad & \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \text{u.d.N.} \quad & -\Delta y + y + y^3 = u \quad \text{auf } \Omega, \\ & \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ & a \le u \le b \quad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit $a, b \in L^2(\Omega)$, $a < b$, $y_d \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Setze $Y = H^1(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$.

a) Geben Sie die schwache Formulierung der Zustandsgleichung an und schreiben Sie das Problem abstrakt in der Form

$$\min_{y \in Y,\, u \in U} f(y,u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y,u) = 0, \quad u \in U_{ad}$$

mit $E : Y \times U \to Y^*$.

b) Begründen Sie, dass zu jedem $u \in U$ ein eindeutiges $y = y(u) \in Y$ existiert mit $E(y(u), u) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass $E : Y \times U \to Y^*$ stetig Fréchet-differenzierbar ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von E und begründen Sie, dass der Operator $E'_y(y,u)$ stetig invertierbar ist.
Tip: Benutzen, Sie **G7**.

d) Folgern Sie mit einem bekannten Satz aus der Analysis, dass die Abbildung $u \in U \mapsto y(u) \in Y$ stetig Fréchet-differenzierbar ist. Wie lautet die Ableitung $y'(u)$?

e) Begründen Sie, dass das reduzierte Zielfunktional $\hat{f} : u \in U \mapsto f(y(u), u)$ stetig Fréchet-differenzierbar ist.

f) Wie kann man $y'(u)h$ durch Lösen einer PDE berechnen? Geben Sie die Schritte zur Berechnung der Richtungsableitung $d\hat{f}(u,h) = \hat{f}'(u)h$ an.

g) Begründen Sie, dass das Optimierungsproblem eine Lösung hat.

Abgabetermin für Hausaufgaben: Montag, 04.06.07 **in der Vorlesung**.