Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Ulbrich

Sommersemester 2007
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung
Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

G4. Sobolev-Ungleichung

Sei $p \in [1, \infty[$. Zeigen Sie:

a) Für alle $u \in C^\infty(\,]0,1[\,)$ gilt $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \leq 2 \cdot \|u\|_{W^{1,p}}$.

b) Für alle $u \in W^{1,p}(\,]0,1[\,)$ gilt $\|u\|_{L^\infty} \leq 2 \cdot \|u\|_{W^{1,p}}$.

Wir haben also die stetige Einbettung $W^{1,p}(\,]0,1[\,) \subset L^\infty(\,]0,1[\,)$.

Sie dürfen folgende Tatsache verwenden: Gilt $u_k \to u$ in L^p, dann existiert eine Teilfolge $(u_k)_{k \in K}$ mit $(u_k)_{k\in K} \to u$ fast überall.

Tip: Benutzen Sie ein Dichtheitsargument.

G5. Kompaktheit und die Existenz von Minima für nichtkonvexe Probleme

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit $C^{0,1}$-Rand. Betrachte das Problem

$$\min_{(y,u)\in W^{2,4}(\Omega)\times L^2(\Omega)} f(y) := \int_\Omega (-y^2 + y^3)\, dx \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} &E(y,u) := y_{x_1} + y_{x_2} - u = 0, \\ &\|y\|_{W^{2,4}} \leq 1, \;\; |u| \leq 1. \end{aligned} \tag{P}$$

Zeigen Sie:

a) Das Problem (P) hat zulässige Punkte und ist nach unten beschränkt.

b) Es existiert ein Banachraum $W \subset H^1(\Omega)$, so dass die Einbettung $W^{2,4}(\Omega) \subset\subset W$ kompakt ist und zudem $f : W \to \mathbb{R}$ sowie $E : W \times L^2 \to L^2$ stetig sind.

c) Das Problem (P) hat eine optimale Lsung.
Hinweis: Sie dürfen benutzen: Gilt $\|y_k\|_{W^{2,4}} \leq 1$ und $y_k \to y$ in W, dann gilt auch $y \in W^{2,4}(\Omega)$ und $\|y\|_{W^{2,4}} \leq 1$.

G6. Poissongleichung als Minimierungsproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $f \in L^2(\Omega)$.
Der Raum $V := H_0^1(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_V := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

ist ein Hilbertraum, denn die induzierte Norm $\|\cdot\|_V = |\cdot|_{H^1}$ und die Norm $\|\cdot\|_{H^1}$ sind wegen der Poincaré-Ungleichung äquivalent.
Wir betrachten auf V das Energie-Funktional

$$J(w) := \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} \nabla w(x) \cdot \nabla w(x) - f(x) w(x)\Big)\, dx = \frac{1}{2}(w,w)_V - (f,w)_{L^2}.$$

Bitte wenden!

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die schwache Formulierung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{D}$$

für die Poisson-Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} &\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ &\qquad\qquad \text{Kurz:} \quad (u,v)_V = (f,v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{DS}$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes $u \in V$ und $v \in V$ ist die Abbildung $t \in \mathbb{R} \mapsto J(u+tv)$ stetig differenzierbar. Wie lautet die Ableitung in $t = 0$?

b) Für $u \in V$ sind äquivalent:
   i) $J(u) = \min_{w \in V} J(w)$
   ii) $(u,v)_V = (f,v)_{L^2} \quad \forall v \in V$

c) Es gibt genau eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ die (DS) erfüllt, also genau eine schwache Lösung von (D).

   Tip: Man verwende den Rieszschen Darstellungssatz.

Also ist die schwache Lösung u von (D) eindeutig und zudem das eindeutige Minimum von J.

H2. Kompakte Einbettung in Hölderräume und Existenz von Optimallösungen

Für jedes $\beta \in]0,1]$ ist der Hölder-Raum

$$C^{0,\beta}([0,1]) = \{u \in C([0,1]) \ : \ \|u\|_{C^{0,\beta}} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{C^{0,\beta}} = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta}$$

ist ein Banachraum. Sei $p \in]1, \infty[$.

a) Zeigen Sie durch Verfeinerung von **G4.**, dass die stetige Einbettung gilt $W^{1,p}(]0,1[) \subset C^{0,1-1/p}([0,1])$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\beta \in]0,1]$ die Einbettung $C^{0,\beta}([0,1]) \subset\subset C([0,1])$ kompakt ist, also gilt:
   Jede beschränkte Folge (u_k) in $C^{0,\beta}([0,1])$ besitzt eine konvergente Teilfolge in $C([0,1])$.

   Tip: Zeigen Sie die Existenz einer Teilfolge $(u_k)_{k \in K}$, so dass $(u_k(x))_{k \in K}$ in allen rationalen Punkten $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ konvergiert (dies sind abzählbar viele Punkte!). Weisen Sie nun nach, dass $(u_k)_{k \in K}$ eine Cauchy-Folge in $C([0,1])$ ist.

c) Warum gilt also die kompakte Einbettung $W^{1,p}(]0,1[) \subset\subset C([0,1])$ für $p > 1$?

d) Folgern Sie, dass das Problem

$$\max_{y \in H^1(]0,1[)} \|y\|_{L^\infty} \quad \text{s.t.} \quad \|y\|_{H^1} \le 2$$

   eine Lösung hat.

   Hinweis: Sie dürfen benutzen: Gilt $\|y_k\|_{H^1} \le 2$ und $y_k \to y$ in L^2, dann gilt auch $y \in H^1$ und $\|y\|_{H^1} \le 2$.

Abgabetermin für Hausaufgaben: Mittwoch, 23.05.07 in der Übung.