Übungen zur Vorlesung
Optimierung bei partiellen Differentialgleichungen

G1. Berechnung des Gradienten der reduzierten Zielfunktion

Wir betrachten das endlichdimensionale Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^q} f(y,u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y,u) = 0$$

mit C^1-Funktionen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$. Es sei bekannt, dass die Gleichung $E(y,u) = 0$ für jedes $u \in \mathbb{R}^q$ genau eine zugehörige Lösung $y(u) \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Das Problem ist dann offensichtlich äquivalent zu dem *reduzierten Problem*

$$\min_{u \in \mathbb{R}^q} f^r(u) \quad \text{mit} \quad f^r(u) := f(y(u), u).$$

Ferner sei $E'_y(y(u), u)$ für jedes $u \in \mathbb{R}^q$ invertierbar.

a) Differenzieren Sie die Gleichung $E(y(u), u) = 0$ (total) nach u und berechnen Sie daraus die Ableitung $y'(u)$ der Abbildung $u \mapsto y(u)$.

b) Leiten Sie, ähnlich wie in a), zu gegebenem $v \in \mathbb{R}^q$ ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Richtungsableitung (Sensitivität) $d_v y(u) := y'(u)v$ her. Nutzen Sie $d_v y(u)$, um die Richtungsableitung $(f^r)'(u)v$ zu bestimmen.

c) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \nabla f^r(u) &= (f^r)'(u)^T = y'(u)^T \nabla_y f(y(u), u) + \nabla_u f(y(u), u) \\ &= E'_u(y(u), u)^T p + \nabla_u f(y(u), u), \end{aligned}$$

wobei der *adjungierte Zustand* $p = p(u) \in \mathbb{R}^n$ die *adjungierte Gleichung* löst

$$E'_y(y(u), u)^T p = -\nabla_y f(y(u), u).$$

d) Vergleichen Sie den Aufwand der Berechnung von $\nabla f^r(u)$ bei Verwendung der *Sensitivitätsmethode* aus b) und der *Adjungiertenmethode* aus c).

G2. Funktionalanalytische Grundlagen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Vektorraum stetiger Funktionen

$$C(\bar{\Omega}) := \{v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}; \ \ v \ \text{stetig}\}.$$

Definiere für $u, v \in C(\bar{\Omega})$

$$\|u\|_{L^\infty} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|, \quad (u,v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\|_{L^2} := \sqrt{(u,u)_{L^2}}.$$

a) Sei X der Banachraum $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^\infty})$. Entscheiden Sie, welche der folgenden linearen Funktionale in X^* liegen und schätzen Sie gegebenenfalls deren X^*-Norm ab:

- $u_1^* : u \in X \mapsto u(y)$ mit festem $y \in \Omega$,

Bitte wenden!

- $u_2^* : u \in X \mapsto \int_\Omega v(x)u(x)\,dx$ mit festem $v \in C(\bar\Omega)$,
- $u_3^* : u \in X \mapsto \int_{\Omega\setminus\{y\}} \frac{u(x)}{\|x-y\|_2}\,dx$ mit festem $y \in \Omega$.

b) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit $\|u\|_{L^2} \le C\|u\|_{L^\infty}$ für alle $u \in C(\bar\Omega)$.

c) Sei H der Prä-Hilbertraum aller Funktionen aus $C(\bar\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{L^2}$. Zeigen Sie, dass H kein Hilbertraum ist. Welche der Funktionale aus a) sind beschränkt auf H?

G3. Existenz von Minima

Haben die folgenden Optimierungsprobleme Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\min\limits_{u\in C([0,1])} \int_0^1 u(x)^2\,dx$ s.t. $u(1) = 1$.

b) $\min\limits_{u\in L^2((0,1))} -\int_0^1 xu(x)^2\,dx$ s.t. $\|u\|_{L^2} \le 1$.
Hierbei sei $L^2((0,1))$ der übliche Lebesgue-Raum, also die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $(C([0,1]),(\cdot,\cdot)_{L^2})$.

H1. Rund um Differentialoperatoren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei H der Prä-Hilbertraum aller Funktionen aus $C(\bar\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Weiter sei V der Prä-Hilbertraum aller Funktionen aus $C^1(\bar\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^1} := \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)^T\nabla v(x))\,dx.$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$u \in V \mapsto u_{x_i} \in H, \quad 1 \le i \le n,$$
linear und stetig ist.

b) Finden Sie Funktionen $u_k \in C^2(\bar\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit
$$\|u_k\|_{H^1} \le 1, \quad \|\Delta u_k\|_{L^2} \ge k.$$

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$(u,v) \in V^2 \mapsto \int_\Omega \nabla u(x)^T\nabla v(x)\,dx \in \mathbb{R}$$
bilinear und stetig ist.

d) Rufen Sie sich den Gaußschen Integralsatz in Erinnerung und zeigen Sie: Hat Ω hinreichend glatten Rand, so gilt für alle $u \in C^2(\bar\Omega)$, $v \in C^1(\bar\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = 0$:
$$\int_\Omega -\Delta u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)^T\nabla v(x)\,dx.$$

e) Zeigen Sie, nochmals mit dem Gaußschen Integralsatz: Ist $y \in C^2(\bar\Omega)$ Lösung von
$$-\Delta y = g \quad \text{auf } \Omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu} = h \quad \text{auf } \partial\Omega,$$
mit Funktionen $g \in L^2(\Omega)$ und $h \in L^2(\partial\Omega)$, dann gilt:
$$\int_\Omega \nabla y(x)^T\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega g(x)v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} h(x)v(x)\,dS(x) \quad \forall\, v \in C^1(\bar\Omega).$$

Abgabetermin für Hausaufgaben: Mittwoch, 09.05.07 in der Übung.