12. Übung Lineare Algebra II für M
– Lösungsvorschläge –

Gruppenübungen

(G30)

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \exp : M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}. \end{array}$$

a) Bestimmen Sie für die Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

die Matrix $\exp(D)$.

b) Bestimmen Sie $\exp(N)$ für die nilpotente Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

a) Für eine Diagonalmatrix gilt

$$D^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^j \end{pmatrix}.$$

Demnach ist

$$
\begin{aligned}
\exp(D) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^j}{j!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^j}{j!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n^j}{j!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j}{j!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^j}{j!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^j}{j!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Da N eine nilpotente Matrix ist, gibt es eine natürliche Zahl k so, dass $N^k = 0$ ist. Damit gilt

$$\exp(N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N^j}{j!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!} + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\overbrace{N^j}^{=0}}{j!} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N^j}{j!}.$$

Somit ist

$$\exp(N) = \sum_{j=0}^{3} \frac{N^j}{j!} = E + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(G31)

a) Gegeben seien zwei kommutierende Matrizen A und B, d.h. $AB = BA$, für die $\exp(A)$ und $\exp(B)$ existieren. Zeigen Sie, dass dann

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

ist.

Hinweis: Nach der Cauchyschen Produktformel gilt $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

b) Zeigen Sie, dass für einen Jordanblock

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_{:=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{:=N}$$

gilt:

$$\exp(J) = \exp(D)\exp(N)$$

c) Zeigen Sie, dass für $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

$$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)S$$

ist.

d) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion für alle Matrizen aus $M_n(\mathbb{C})$ definiert ist.

e) Zeigen Sie, dass für $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\det(\exp(A)) = e^{(\mathrm{tr}(A))}$$

gilt.

---

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
&\overset{AB=BA}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \\
&= \exp(A)\exp(B).
\end{aligned}$$

b) Mit a) müssen wir zeigen, dass $ND = DN$ gilt. Dies folgt aus

$$ND = N\lambda E = \lambda N E = \lambda E N = DN.$$

Somit ist nach a) $\exp(J) = \exp(D)\exp(N)$.

c) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$(S^{-1}AS)^k = \underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\dots(S^{-1}AS)}_{k-\text{mal}} = S^{-1}A^kS.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \exp(S^{-1}AS) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^{-1}A^jS}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S^{-1}\frac{A^j}{j!}S \\ &= S^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\right)S = S^{-1}\exp(A)S. \end{aligned}$$

d) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$, dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$, sodass $S^{-1}AS$ in Jordannormalform ist. Demnach nehmen wir o.B.d.A. an, dass A in Jordannormalform vorliegt.

Nach den Rechenregeln für Blockmatrizen gilt für eine Matrix in Jordannormalform mit verschiedenen Jordanblöcken

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1,m_1} & & & \\ & J_{\lambda_2,m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_n,m_n} \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} J^j_{\lambda_1,m_1} & & & \\ & J^j_{\lambda_2,m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^j_{\lambda_n,m_n} \end{pmatrix}.$$

Demnach genügt es zu zeigen, dass die Exponentialfunktion für einen Jordanblock definiert ist. Dies haben wir jedoch schon in Aufgabenteil b) gezeigt.

e) Da die Spur invariant unter Basistransformationen ist und

$$\det(\exp(S^{-1}AS)) = \det(S^{-1}\exp(A)S) = \det(\exp(A))$$

ist, gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass A in Jordannormalform vorliegt. Erneut reicht es, die Aussage für einen Jordanblock zu zeigen (Blockmatrizen). Sei J ein Jordanblock, d.h. $J = D + N$ mit einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten matrix N. Dann gilt

$$\det(\exp(J)) = \det(\exp(D+N)) = \det(\exp(D)\exp(N)) = \det(\exp(D))\det(\exp(N)).$$

Für eine Diagonalmatrix gilt nach G30, a)

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(\exp(D)) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = e^{\mathrm{tr}(D)}.$$

Weiterhin ist nach G30, b) $\det(\exp(N)) = 1$, sodass nun

$$\det(\exp(J)) = \det(\exp(D)) \det(\exp(N)) = e^{\mathrm{tr}(D)}$$

gilt. Es bleibt demnach zu zeigen, dass $e^{\mathrm{tr}(A)} = e^{\mathrm{tr}(D)}$ ist, dies ist jedoch offensichtlich der Fall, da die Spur invariant unter Basistransformation ist und für einen Jordanblock gilt $\mathrm{tr}(J) = \mathrm{tr}(D + N) = \mathrm{tr}(D) + \mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(D)$.

(G32)

Gegeben Sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{R} &\to M_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto \exp(tA). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung φ_A im Punkt 0 differenzierbar ist, indem sie den Grenzwert

$$\frac{d}{dt}\varphi_A\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(tA)\bigg|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp((0+h)A) - \exp(0)}{h}$$

bestimmen.

Es ist

$$\exp(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(0)^j}{j!} = E$$

und

$$\exp((0+h)A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((0+h)A)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(hA)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j A^j}{j!}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\exp((0+h)A)-\exp(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h^jA^j}{j!}-E}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{h^jA^j}{j!}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{h^jA^j}{h(j!)} \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{h^{j-1}A^j}{j!} \\
&= \lim_{h\to 0} A+\frac{hA^2}{2!}+\frac{h^2A^3}{3!}+\dots \\
&= A.
\end{aligned}$$