Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
28. und 29. Juni

11. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II"

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Einstieg)

Zeige, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ keine Jordannormalform besitzt.

Lösung: Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Folglich besitzt A keine reellen Eigenwerte und daher auch keine Jordannormalform in $\mathbb{R}$.

Aufgabe G27 (Ähnliche Matrizen)

(a) Zeige, daß ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

Zur Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodaß $B = S^{-1}AS$ gilt.

(b) Seien A und B ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen das gleiche Minimalpolynom haben.

Lösung:

(a) Seien A und B ähnlich, das heißt es gibt eine invertierbare Matrix S, sodaß $B = S^{-1}AS$ gilt. Dann gilt für das charakteristische Polynome

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}IS) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \underbrace{\det(S^{-1})}_{=\frac{1}{\det(S)}} \det(A - \lambda I) \det(S) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Da A und B dasselbe charakteristische Polynom besitzen, haben sie auch die gleichen Eigenwerte.

(b) Zunächst machen wir uns klar, dass für Polynome $p(x)$ gilt, dass $p(S^{-1}AS) = S^{-1}p(A)S$ gilt. Da $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ können wir folgende Umformungen durchführen:

$$p(S^{-1}AS) = \sum_{i=0}^n a_i(S^{-1}AS)^i = \sum_{i=0}^n a_i S^{-1}(A)^i S = S^{-1}(\sum_{i=0}^n a_i A^i)S = S^{-1}p(A)S$$

Daher ist folgende Argumentation zulässig: Sei S eine invertierbare Matrix, so dass gilt $A = S^{-1}BS$. Weiterhin seien μ_A und μ_B die jeweiligen Minimalpolynome.

$$0 = \mu_A(A) = \mu_A(S^{-1}BS) = S^{-1}\mu_A(B)S$$

Da S invertierbar ist, muss also gelten $\mu_A(B) = 0$. Dies impliziert, dass μ_A μ_B teilt. Man kann sich dies klar machen, da man nach Caley-Hamilton weiß, dass μ_A und μ_B die selben Linearfaktoren haben. Oder aber dadurch, dass man sich klar macht, dass das jeweilige Minimalpolynom Erzeuger eines Ideals im Polynomring ist und dadurch alle anderen Elemente des Ideals teilt. Da nun aber μ_B minimal ist, muss gelten $\mu_A = \mu_B$.

Aufgabe G28 (Jordan-Normalform)
Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Matrix A ist eine obere Dreiecksmatrix. Folglich stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und sind -1, 1 und 42. Da sie paarweise verschieden sind ist A diagonalisierbar und

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von A.
Die Matrix B ist reell und symmetrisch und daher diagonalisierbar. Für das charakteristische Polynom von B gilt

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(1-\lambda)(-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (-1)(1-\lambda)^2(1+\lambda) \end{aligned}$$

Folglich besitzt B die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und -1 mit der algebraischen Vielfachheit eins. Daher ist

$$J_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von B.
Für das charakteristische Polynom von C gilt

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda) + 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

Folglich besitzt C die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und 2 mit der algebraischen Vielfachheit eins.

Um zu entscheiden, ob es zum Eigenwert eins ein oder zwei Jordanblöcke gibt sind, ist die Dimension des entsprechenden Eigenraums E zu berechnen. Es gilt

$$E = \ker(C - I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III-II}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da der Eigenraum die Dimension eins besitzt ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 gleich eins und daher

$$J_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Jordannormalform von C.

Aufgabe G29 (Jordan-Normalform, kann auch als zusätzliche Hausaufgabe gemacht werden)
Berechnen Sie die Jordan-Normalform zu folgender Matrix:

$$\text{B} := \begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & -9 & 6 \\ 7 & -6 & -13 & 9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Eigenwerte der Matrix sind 1 und 2.

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$$

Zuerst betrachten wir den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und berechnen den verallgemeinerten Eigenraum V^1. Dazu berechnen wir Kern$(B - E)$. Dies ist ein zweidimensionaler Unterraum und da die algebraische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$ zwei ist, müssen wirKern$(B - E)^2$ nicht mehr berechnen.
Wir wählen

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

als Basis von V^1 Wir erhalten damit zwei Jordanketten der Länge eins, die eine Jordanbasis von V^1 bilden.
Nun betrachten wir $\lambda_2 = 2$. Der Kern von $(B - 2I)$ ist ein eindimensionaler Unterraum. Da die algebraische Vielfachheit von λ_2 zwei ist, müssen wir Kern$(B - 2I)^2$ berechnen. Die Dimension dieses Raumes ist zwei, also ist er der verallgemeinerte Eigenraum V^2.
Wir wählen die folgende Basis von V^2:

$$c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten zwei Jordanketten der Länge zwei:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir reduzieren diese Jordanketten auf eine und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Jordanbasis für V^2.
Eine Jordanbasis von V ist daher

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass dabei die Jordankette rückwärts eingetragen wurde.
(Nun kann man nachprüfen: Schreibt man die Basisvektoren in die Spalten von S, so wird wirklich:

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.)$$

Hausübung

Aufgabe H20 (Jordan-Normalform I) (8 Punkte)

Gib reelle Matrizen A_i in Jordannormalform mit den folgenden Eigenschaften an:

(a) A_1 hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.

(b) A_2 hat den Eigenwert -1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.

(c) A_3 hat den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 und den Eigenwert -2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

(d) Die Matrizen A_4 und A_5 haben beide den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2, haben keine weiteren Eigenwerte und sind trotzdem nicht ähnlich.

(e) Bestimmen Sie für alle Matrizen A_i jeweils das Minimalpolynom.

Lösung:
Mögliche Lösungen sind:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Das Minimalpolynom lässt sich aus der Größe der Blöcke der Jordannormalform bestimmen. Nach dem Satz von Caley-Hamilton müssen alle Linearfaktoren des Charakteristischen Polynoms im Minimalpolynom vorkommen. So lassen sich in der Jordanschen Normalform mit den Eigenwerten auch die Linearfaktoren des Minimalpolynoms ablesen. Bleibt die Frage, zu welcher Potenz die Linearfaktoren jeweils im Minimalpolynom vorkommen. Dies können wir jedoch an der Größe der Jordanblöcke zum jeweiligen Eigenwert ablesen. Die Dimension d_λ des größten Jordanblocks zu einem Eigenwert λ liefert uns die Potenz des Linearfaktors $(X-\lambda)^{d_\lambda}$.
So ergeben sich die folgenden Minimalpolynome:
- $\mu_{A_1}(X) = (X-1)^3$
- $\mu_{A_2}(X) = (X+1)^2$
- $\mu_{A_3}(X) = (X-2)^2(X+2)^2$
- $\mu_{A_4}(X) = (X-1)^2$
- $\mu_{A_5}(X) = (X-1)^3$

Aufgabe H21 (Jordan-Normalform II) (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Jordan-Normalform bis auf Reihenfolge der Jordankästchen eindeutig ist.

Lösung:

(i) Diese erste Lösung ist zu großen Teilen aus Artmann entnommen und leider so nicht wirklich nach vollziehbar. Deshalb unten noch ein anderer Lösungsansatz. Angenommen es gibt zwei Jordansche NormalformenJ_1, J_2 zu einer Matrix A. Dann existieren auch Matrizen S und T, so dass $S^{-1}AS = J_1$ und $T^{-1}AT = J_2$. Da es auf die Reihenfolge der Kästchen nicht ankommt, können wir o.B.d.A. annehmen, dass in beiden Jordanschen Normalformen als erstes ein Kästchen zum Eigenwert λ_1 mit maximalen Längen n_1 bzw. m_1 steht.
Wegen $A = SJ_1S^{-1}$ haben wir $J_2 = T^{-1}SJ_1S^{-1}T$ und mit $P = S^{-1}T$ erhalten wir dann $J_2 = P^{-1}J_1P$, also auch $PJ_2 = J_1P$. Damit haben wir für die Spalten von J_1P:

$$J_1p_1 = \lambda_1 p_1 \tag{1}$$
$$J_1p_2 = \lambda_1 p_2 + p_1 \tag{2}$$
$$\vdots \tag{3}$$
$$J_1p_{n_1} = \lambda_1 p_{n_1} + p_{n_1-1} \tag{4}$$

Wobei p_i die Spalten von P sind.
Machen wir die gleich Betrachtung für die linke Seite der Gleichung $PJ_2 = J_1P$, betrachten wir also die Spalten von PJ_2, so erhalten wir das System:

$$P(J_2)_1 = \lambda_1 p_1 \tag{5}$$
$$P(J_2)_2 = \lambda_1 p_2 + p_1 \tag{6}$$
$$\vdots \tag{7}$$
$$P(J_2)_{m_1} = \lambda_1 p_{m_1} + p_{m_1-1} \tag{8}$$

Natürlich müssen die Spalten zweier gleicher Matrizen übereinstimmen, also muss auch $n_1 = m_1$ gelten.

(ii) Man kann sich überlegen, dass ähnliche Matrizen gleiche verallgemeinterte Eigenräume besitzen. Also auch die gleichen Dimensionen auf jeder Stufe des verallgemeinerten Eigenraums. Hiermit ist die Potenz von $(A-\lambda E)$ gemeint, zu welcher dann der Kern bestimmt wird. Diese Dimensionen legen aber genau fest, wie die Jordan-Kettenstruktur ist. Siehe dazu auch im Skript.