10. Übung Lineare Algebra II für M
– Lösungsvorschläge –

Hausübungen

(H18)(12 Punkte)

Gegeben Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

in Standardbasis und die Basis

$$\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Geben Sie die Darstellung der Matrix A als Abbildung $(\mathbb{R}^4, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}^4, \mathcal{B})$ an.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die geometrische sowie die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte.

c) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenräume.

d) Vergleichen Sie die Basis, die aus den Basisvektoren der verallgemeinerten Eigenräume besteht mit der Basis $\mathcal{B}$. Was fällt ihnen auf?

---

a) Die Transformationsmatrix lautet

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da es sich um eine Blockmatrix handelt, lautet die Inverse

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich als neue Matrix

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (2-\lambda)^3(3-\lambda). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 3 und $\lambda_2 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Um die geometrische Vielfachheit zu bestimmen, bestimmen wir eine Basis des jeweiligen Eigenraumes. Zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ ist dies die Lösung des Gleichungssystems

$$(A-3I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} v = 0.$$

Als Basis für diesen Lösungsraum ergibt sich der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda_2 = 3$ ist demnach 1.

Für die Basis des Eigenraumes zu $\lambda_1 = 2$ bestimmen wir die Lösung des Gleichungssystems

$$(A-2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} v = 0.$$

Hier erhalten wir als Basis die Vektoren

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda_1 = 2$ ist demnach 2.

c) Da für den Eigenwert λ_2 die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, stimmt auch der verallgemeinerte Eigenraum mit dem Eigenraum überein.

Für den Eigenwert λ_3 bestimmen wir noch die Lösung des Gleichungssystems

$$(A-2I)^2 v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} v = 0.$$

Als Basis für den Lösungsraum erhalten wir die Vektoren

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir insgesamt den verallgemeinerten Eigenraum

$$U^{(\lambda_1)} = \operatorname{lin}\{v_2, v_3, v_4, v_5\} \overset{v_3 = v_5}{=} \operatorname{lin}\{v_2, v_3, v_4\}.$$

d) Die Basis der verallgemeinerten Eigenräume ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sie ist eine Permutation der Basis $\mathcal{B}$, d.h. die Basis $\mathcal{B}$ war eine Jordanbasis von A. Dies erkennt man auch daran, dass die Transformation in diese Basis die Matrix A in eine Jordannormalform überführt.

(H19)(3 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $U^{(\lambda)}$ ein verallgemeinerter Eigenraum der Abbildung $A : V \to V$ zum Eigenwert λ.

Zeigen Sie, dass der verallgemeinerte Eigenraum invariant unter der Abbildung A ist.

Sei $v \in U^{(\lambda)}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl m, sodass $(A-\lambda I)^m v = 0$ ist. Demnach gilt

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)^m(Av) &= (A-\lambda I)^m(Av-\lambda v+\lambda v)\\ &= (A-\lambda I)^m(Av-\lambda v)+(A-\lambda I)^m\lambda v\\ &= (A-\lambda I)^{m+1}v+\lambda(A-\lambda I)^m v = 0.\end{aligned}$$

Demnach ist mit $v \in U^{(\lambda)}$ auch $Av \in U^{(\lambda)}$, d.h. $U^{(\lambda)}$ ist invariant unter A.