10. Übung Lineare Algebra II für M

– Lösungsvorschläge –

Gruppenübungen

(G23)

Gegeben Sie die 4×4 Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenräume von A.

---

a) Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{3. Zeile}}}{=} (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Folglich besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$.

b) Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_{\lambda_1} := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für diesen Eigenwert stimmt demnach der Eigenraum mit dem verallgemeinerten Eigenraum überein.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 gilt

$$E_{\lambda_2} := \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zum Bestimmen des noch fehlenden Basisvektors des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_2 bestimmen wir

$$\ker(A - \lambda_2 I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

d.h. wir erhalten den verallgemeinerten Eigenraum

$$U^{(\lambda_2)} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(G24)

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

b) Was können Sie anhand des Minimalpolynoms über die Diagonalisierbarkeit der Matrix A aussagen?

---

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)^3(5-\lambda)$$

Es müssen beide Faktoren $(2-\lambda)$ und $(5-\lambda)$ auch Faktoren im Minimalpolynom von A sein. Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt, gibt es keine weiteren Linearfaktoren. Daher muss das Minimalpolynom eines dieser drei Polynome sein:

$$m_1(\lambda) := (2-\lambda)(5-\lambda), \quad m_2(\lambda) := (2-\lambda)^2(5-\lambda), \quad m_3(\lambda) = (2-\lambda)^3(5-\lambda).$$

Wir setzen nun die Matrix A ein. Es gilt

$$m_1(A) = (2I-A)(5I-A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. m_1 ist nicht das Minimalpolynom. Weiterhin gilt

$$m_2(A) = (2I-A)^2(5I-A) = (2I-A)m_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Demnach ist $m_2(\lambda) = (2-\lambda)^2(5-\lambda)$ das Minimalpolynom von A.

b) Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr Minimalpolynom in unterschiedliche Linearfaktoren zerfällt.
Ist die Matrix diagonalisierbar, so gibt es eine ähnliche Diagonalmatrix, d.h. alle Einträge ausserhalb der Diagonalen sind 0. Mit einem Linearfaktor können wir jedoch gerade diese Diagonaleinträge verändern und nach den Rechenregeln für Diagonalmatrizen ergibt sich das Minimalpolynom als das Polynom, welches jeden Linearfaktor genau einmal enthält.

Betrachten wir andererseits eine Matrix, die ähnlich zu einer Matrix ist, die neben der Diagonalen noch genau einen Eintrag auf der Nebendiagonale hat, so stellen wir fest, dass dieser Eintrag mit den Linearfaktoren nicht verändert werden kann. Hier müssen wir eine Potenz eines Linearfaktors im Minimalpolynom haben.

Demnach ist Matrix A nicht diagonalisierbar.

(G25)
Gegeben sei eine Matrix A und die Jordankette $v_1, \ldots, v_s$ zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_s$ linear unabhängig sind.

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_s v_s = 0.$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Sei $k := \max\{i \ : \ \alpha_i = 0\}$ bzgl. dieser nichttrivialen Lösung. Da die v_j eine Jordankette bilden gilt $(A-\lambda I)^{k-1}v_k = v_{k-1}$ und $(A-\lambda I)^{k-1}v_j = 0$ für $j < k$. Wir erhalten damit

$$(A - \lambda I)^{k-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_s v_s) = \alpha_k v_{k-1} = 0.$$

Dies impliziert jedoch $\alpha_k = 0$, im Widerspruch zur Wahl von k. Damit sind alle $\alpha_i = 0$ und die v_i sind linear unabhängig.