Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
14. und 15. Juni

9. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Skalarprodukt)

Zeigen Sie, dass es sich bei der in der Vorlesung angegebenen Abbildung für den Vektorraum der reellen Polynome vom Höchstgrad 3 (P_3) um ein Skalarprodukt handelt. Die Abbildung ist folgendermaßen definiert:

$$\langle .,. \rangle := P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}, \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Lösung: Wir müssen zeigen, dass die Eigenschaften $(B_{1,2}), (S), \text{und}(P)$ erfüllt sind.
Um zu zeigen, dass die Abbildung bilinear ist, nutzen wir die Linearität des Integrals:
$\langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle = \int_0^1 (p_1(x) + p_2(x))q(x)dx = \int_0^1 p_1(x)q(x) + p_2(x)q(x)dx = \int_0^1 p_1(x)q(x) + \int_0^1 p_2(x)q(x)dx = \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle$
Genauso ergibt sich: $\langle p(x), q_1(x) + q_2(x) \rangle = \langle p(x), q_1(x) \rangle + \langle p(x), q_2(x) \rangle$.
Weiterhin gilt:

$$\langle \alpha p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 \alpha p(x)q(x)dx = \alpha \int_0^1 p(x)q(x)dx = \alpha \langle p(x), q(x) \rangle$$

Und genauso gilt:$\langle p(x), \alpha q(x) \rangle = \alpha \langle p(x), q(x) \rangle$
Für (S) nutzen wir die Symmetrie der Multiplikation. Es gilt nämlich:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x) = \langle q(x), p(x) \rangle$$

Um (P) zu zeigen gehen wir folgendermaßen vor:

$$\langle p(x), p(x) \rangle = \int_0^1 p(x)p(x)dx = \int_0^1 p^2(x) \geq 0$$

Die letzte Ungleichung gilt, da wir eine nichtnegative Funktion integrieren.
Bleibt noch zu zeigen $\langle p(x), p(x) \rangle = 0 \implies p(x) = 0$.
Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\langle p(x), p(x) \rangle = 0$ gilt, aber gleichzeitig ist $p(x) \neq 0$. Da $p(x)$ ein Polynom ist, muss dann gelten, dass einer der Koeffizienten ungleich null ist. Dann ist jedoch das Skalarprodukt ungleich null: Widerspruch!
Es folgt also, dass $p(x) = 0$ gilt.

Aufgabe G15 (Dreiecksungleichung)

Beweisen Sie die Dreiecksungleichung:
Für alle v, w aus einem euklidischen oder unitären Vektorraum gilt:

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$$

wobei, wie in der Vorlesung definiert, gilt $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Lösung: Wir werden wieder die auf beiden Seiten quadrierte Ungleichung zeigen, da daraus die gewünschte Ungleichung folgt. Wir zeigen also: $\langle v + w, v + w\rangle \leq (||v|| + ||w||)^2$.

$$\begin{aligned}
||v + w||^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle && \text{nach (B'}_1\text{) und (B}_2\text{)} \\
&\leq ||v||^2 + 2||v||\ ||w|| + ||w||^2 && \text{nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung} \\
&= (||v|| + ||w||)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe G16 (Orthogonalsysteme)

Zeigen Sie, dass jedes Orthogonalsystem (also auch jedes Orthonormalsystem) linear unabhängig ist.

Lösung: Sei $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ein Orthogonalsystem. Zu zeigen ist, dass aus $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
Nehmen wir an $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$. Dann gilt (da es sich um ein Orthogonalsystem handelt:

$$0 = \left\langle v_j, \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v_j, v_i\rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j\rangle$$

Da für alle $j = 1, \ldots m$ gilt $\langle v_j, v_j\rangle \neq 0$, können wir schließen, dassfür alle $j = 1, \ldots m$ gelten muss, dass $\lambda_j = 0$. Also ist jedes Orthogonalsystem linear unabhängig.

Aufgabe G17 (Orthogonale Gruppe)

Zeigen Sie, dass die Orthogonalen Abbildungen eines euklidischen, bzw. unitären endlichdimensionalen Vektorraums V eine Gruppe $O(V)$ bilden.

Lösung: Wir geben den Beweis hier für den euklidischen Fall an. Im unitären Fall verläuft alles analog.

- $id_V \in O(V)$, da die Identitätsabbildung offensichtlich orthogonal ist
- $\varphi, \psi \in O(V) \implies \varphi \circ \psi \in O(V)$
  Dies gilt, da

$$\langle(\varphi \circ \psi)(v), (\varphi \circ \psi)(w)\rangle = \langle(\varphi(\psi(v)), \varphi(\psi(w))\rangle = \langle\psi(v), \psi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

- $\varphi \in O(V) \implies \varphi^{-1} \in O(V)$
  Da V endlichdimensional ist, ist φ bijektiv, hat also ein Inverses φ^{-1}. Weiterhin gilt $v = \varphi(\varphi^{-1}(v))$ für alle $v \in V$. Daher haben wir:

$$\langle v, w\rangle = \left\langle\varphi(\varphi^{-1}(v)), \varphi(\varphi^{-1}(w))\right\rangle = \left\langle\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w)\right\rangle$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Skalarprodukt) (4 Punkte)

Zeigen sie, dass für jede reelle symmetrische, positiv definite Matrix A durch die Abbildung $(x, y) \mapsto x^T Ay$, mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ (für passendes n) ein reelles Skalarprodukt definiert ist. Man nennt dieses Skalarprodukt auch das von der Matrix A *induzierte* Skalarprodukt.

Lösung: *Bilinearität* erhalten wir durch die Linearität der Matrixmultiplikation.
Symmetrisch ist diese bilineare Abbildung, da die Matrix A symmetrisch ist. Es gilt nämlich:

$$\langle x, y\rangle = x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x = y^T Ax = \langle y, x\rangle$$

Weiterhin ist die Abbildung auch *positiv definit*, da A positiv definit ist:

$$x^T Ax \geq 0, \text{ und } x^T Ax = 0 \implies x = 0$$

sind genau die Forderungen, welche eine positiv definite Matrix erfüllen muss.
Also ist die Abbildung ein reelles Skalarprodukt.

Aufgabe H2 (Orthonormalbasis, Gram-Schmidt) (6 Punkte)

Für den Vektorraum P_2 ist die Basis $\{1, x, x^2\}$ gegeben. Finden Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthogonalbasis für diesen Vektorraum in Bezug auf das in G14 für den Vektorraum P_3 angegebene Skalarprodukt.

Lösung: Wir benutzen hier die gleiche Nomenklatur wie im Skript.

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 & v_1 &= 1\\
u_2 &= x - \langle 1, x\rangle\, 1 & &\\
&= x - \left(\int_0^1 x\, dx\right)1 & &\\
&= x - \frac{1}{2} & v_2 &= \frac{x-\frac{1}{2}}{||x-\frac{1}{2}||}\\
& & &= \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})\\
u_3 &= x^2 - \langle 1, x^2\rangle - \left\langle \sqrt{12}(x-\frac{1}{2}), x^2 \right\rangle \sqrt{12}(x-\frac{1}{2}) & &\\
&= x^2 - \left(\int_0^1 x^2\, dx\right)1 - 12\int_0^1 (x-\frac{1}{2})x^2\, dx (x-\frac{1}{2}) & &\\
&= x^2 - x + \frac{1}{6} & v_3 &= \frac{x^2-x+\frac{1}{6}}{||x^2-x+\frac{1}{6}||}\\
& & &= \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})
\end{aligned}$$

Eine Orthonormalbasis in Bezug auf das gegebene Skalarprodukt ist also:
$\{1, \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}), \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})\}$

Aufgabe H3 (Der Hilbertraum ℓ_2 (ohne Analysis nur Teil (b) und (c) unter Annahme von Teil (a)) (5 Punkte)

Sei l_2 die Menge aller komplexen Folgen

$$v = (\alpha_i)_{i=0,1,2,\ldots} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{C}, \text{ so dass}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^2 < +\infty \text{ gilt.}$$

Für zwei Folgen $v = (\alpha_i)_i$ und $w = (\beta_i)_i$ in l_2 definieren wir:

$$v + w = (\alpha_i + \beta_i)_i \qquad \text{und} \qquad \lambda v = (\lambda \alpha_i)_i \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}$$

(a) Machen Sie sich klar, dass l_2 ein Vektorraum ist. Begründen Sie alles Nichtoffensichtliche (im Zweifelsfall also alles).

(b) Klären Sie weiterhin, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \beta_i$ für $(\alpha_i), (\beta_i)_i \in \ell_2$ absolut konvergiert (Beweis erforderlich).
Hinweis: Zeigen Sie hierfür zunächst die Ungleichung $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

(c) Wir können nun für alle $v, w \in l_2$ ein Skalarprodukt folgendermaßen definieren:

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\alpha}_i \beta_i$$

Zeigen Sie, dass der shift operator in ℓ_2: $S : \ell_2 \to \ell_2$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \mapsto (0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ zwar das Skalarprodukt erhält, jedoch nicht bijektiv ist. Damit ist diese Abbildung auch keine orthogonale Abbildung.

Lösung:

(a) Da wir aus Reihen skalare Vielfache herausziehen können, konvergiert auch αv für $v \in l_2$ absolut. Weiterhin können wir für die Summe $v + w$ die Reihe abschätzen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} (|\alpha_i| + |\beta_i|)^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2\max(|\alpha_i|, |\beta_i|) < \infty$$

Die restlichen Eigenschaften eines Vektorraums, werden durch die Eigensschaften der komplexen Zahlen induziert.

(b) Kommen wir nun zur absoluten Konvergenz der Reihe über die Produkte.
Die angegebene Ungleichung $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ gilt, da

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Mit jener Ungleichung erhalten wir:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| = \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| \ |\beta_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N_0} |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 < \infty$$

Wir erhalten also absolute Konvergenz.

(b) Zunächst wollen wir zeigen, dass der Shift-Operator das Skalarprodukt erhält:

$$\langle S(v), S(w) \rangle = \langle (0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots), (0, \beta_0, \beta_1, \ldots) \rangle = 0 + \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\alpha}_i \beta_i = \langle v, w \rangle$$

Die Abbildung erhält also das Skalarprodukt.
Jedoch handelt es sich nicht um eine bijektive Abbildung, da sie nicht surjektiv ist. Der Shift-Operator erzeugt nur Folgen, die an erster Stelle eine 0 enthalten. Andere absolut konvergente Folgen werden nicht erreicht.