8. Übung Lineare Algebra II für M
– Lösungsvorschläge –

Hausübungen

(H13)(5 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir zeigen, wie die Quaternionen $\mathbb{H}$ in die reellen 4×4 Matrizen eingebettet werden können:

Gegeben seien die folgenden Matrizen aus $M_4(\mathbb{R})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathfrak{H}$, der von diesen Matrizen aufgespannt wird, d.h.

$$\mathfrak{H} = \{\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K \in M_4(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Wir statten diesen Vektorraum mit der von $M_4(\mathbb{R})$ induzierten Multiplikation aus. Zeigen sie, dass $\mathfrak{H}$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation einen Schiefkörper bildet, der isomorph zu den Quaternionen ist.

Wir gehen wie in Aufgabe G18 vor, indem wir die Teile b) und d) zeigen.

(i) Wählen wir $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, so ist $0 \in \mathfrak{H}$.

Ist $A \in \mathfrak{H}$, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Damit sind ebenfalls $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta \in \mathbb{R}$ und somit $-A \in \mathfrak{H}$.

(ii) Mit $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta = 0$ ist $E = \mathrm{Id}_4 \in \mathfrak{H}$.

(iii) Sei $A = \alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K \in \mathcal{H}$ und $B = \alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K \in \mathfrak{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A + B &= (\alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K) + (\alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)E + (\beta_1 + \beta_2)I + (\gamma_1 + \gamma_2)J + (\delta_1 + \delta_2)K. \end{aligned}$$

Mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ sind auch die Summen der Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und somit $A + B \in \mathfrak{H}$.

Für die Multiplikation gilt

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K) \cdot (\alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K) \\ &= (\alpha_1\alpha_2 E^2 + \alpha_1\beta_2 EI + \alpha_1\gamma_2 EJ + \alpha_1\delta_2 EK) \\ &\quad +(\beta_1\alpha_2 IE + \beta_1\beta_2 I^2 + \beta_1\gamma_2 IJ + \beta_1\delta_2 IK) \\ &\quad +(\gamma_1\alpha_2 JE + \gamma_1\beta_2 JI + \gamma_1\gamma_2 J^2 + \gamma_1\delta_2 JK) \\ &\quad +(\delta_1\alpha_2 KE + \delta_1\beta_2 KI + \delta_1\gamma_2 KJ + \delta_1\delta_2 K^2). \end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt, dass die Produkte der Matrizen Werte in $\{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ annehmen und Produkte reeler Zahlen sind reele Zahlen. Damit ist auch $AB \in \mathfrak{H}$.

(iv) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathfrak{H} \\ a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} &\longmapsto aE + bI + cJ + dK. \end{aligned}$$

Die Surjektivität der Abbildung ist offensichtlich. Wir zeigen die Injektivität. Seien also $p := a_1\mathbf{1}+b_1\mathbf{i}+c_1\mathbf{j}+d_1\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ und $q := a_2\mathbf{1}+b_2\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+d_2\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ mit $\varphi(p) = \varphi(q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(p) - \varphi(q) &= (a_1 E + b_1 I + c_1 J + d_1 K) - (a_2 E + b_2 I + c_2 J + d_2 K) \\ &= (a_1 - a_2)E + (b_1 - b_2)I + (c_1 - c_2)J + (d_1 - d_2)K = 0. \end{aligned}$$

Nach (i) muss somit $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ und $d_1 = d_2$ gelten, d.h. $p = q$. Somit ist φ injektiv.

(H14)(10 Punkte)
Wir haben in der letzten Übung gesehen, dass sich alle Transformationen des 3-dimensionalen Raumes in homogenen Koordinaten durch 4×4 Matrizen über $\mathbb{R}$ darstellen lassen.

Wir widmen uns nun den Drehungen, welche mit Hilfe der Quaternionen besonders einfach dargestellt werden können. Wir identifizieren den $\mathbb{R}^3$ mit dem imaginären Unterraum der Quaternionen, d.h. für ein festes $a \in \mathbb{R}$ beschreiben die Quaternionen $a\mathbf{1}+x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$ die Punkte $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$. Wir schreiben (a, x) für das Quaternion $a\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

a) Bestimmen Sie die Summe $(a, x) + (b, y)$ und das Produkt $(a, x)(b, y)$, sowie das konjugierte Quaternion $(a, x)^*$ zu (a, x).

Hinweis: Es gilt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + y_1x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$.

b) Wir beschreiben nun eine Drehung im $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse wird dabei durch den Einheitsvektor n repräsentiert. Drehen wir einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel φ um die Drehachse n, so erhalten wir

$$x' = x\cos(\varphi) + n\langle n, r\rangle(1 - \cos(\varphi)) + (n \times x)\sin\varphi.$$

Zeigen Sie, dass die Drehung durch das Quaternion

$$q := \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) n\right)$$

induziert wird, indem Sie zeigen, dass

$$(0, x') = q(0, x)q^*$$

ist.

Hinweis: Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}^3$: $(x \times y) \times x = y - \langle y, x\rangle x$ und $x \times y = -y \times x$.

c) In der letzten Übung haben Sie sich überlegt, wie man eine ONB des $\mathbb{R}^3$ durch 3 Drehungen in eine beliebige andere ONB des $\mathbb{R}^3$ überführen kann. Die Winkel, um die hierbei gedreht werden heißen *Eulerwinkel*. Quaternionen vereinfachen die Hintereinanderausführungen von Drehungen. Bestimmen Sie dazu das Quaternion q, welches eine Drehung um φ_1 um die x-Achse, gefolgt von einer Drehung um φ_2 um die y-Achse und gefolgt von einer Drehung um φ_3 um die z-Achse induziert.

Können Sie anhand der Quaternionen beurteilen, ob eine Änderung der Reihenfolge der Einzeldrehungen die Gesamtdrehung ändert?

---

a) Es ist

$$\begin{aligned} (a, x) + (b, y) &= (a\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) + (b\mathbf{1} + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) \\ &= (a + b)\mathbf{1} + (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k} \\ &= (a + b, x + y). \end{aligned}$$

Für das Produkt ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (a,x)\cdot(b,y) \\
= \; & (a\mathbf{1}+x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k})\cdot(b\mathbf{1}+y_1\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+y_3\mathbf{k}) \\
= \; & (ab-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)\mathbf{1}+(ay_1+bx_1+x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{i} \\
& +(bx_2-x_1y_3+ay_2+y_1x_3)\mathbf{j}+(ay_3+x_2y_3-y_2x_3+bx_3)\mathbf{k} \\
= \; & (ab-\langle x,y\rangle)\mathbf{1}+(ay_1+bx_1+x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{i} \\
& +(ay_2+bx_2-x_1y_3+y_1x_3)\mathbf{j}+(ay_3+bx_3+x_2y_3-y_2x_3) \\
= \; & (ab-\langle x,y\rangle, ay+bx+x\times y).
\end{aligned}$$

Das konjugierte Quaternion zu (a,x) ist

$$(a,x)^* = (a\mathbf{1}+x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k})^* = a\mathbf{1}-x_1\mathbf{i}-x_2\mathbf{j}-x_3\mathbf{k} = (a,-x).$$

b) Wir setzen $\lambda := \cos(\frac{\varphi}{2})$ und $\mu := \sin(\frac{\varphi}{2})$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
q(0,x)q^* &= (\lambda,\mu n)(0,x)(\lambda,-\mu n) \\
&= (-\langle \mu n,x\rangle, \lambda x+\mu(n\times x))(\lambda,-\mu n) \\
&= (-\lambda\mu\langle n,x\rangle-\langle \lambda x+\mu(n\times x),-\mu n\rangle, -\mu\langle n,x\rangle(-\mu n)+\lambda(\lambda x+\mu(n\times x)) \\
&\quad +(\lambda x+\mu(n\times x))\times(-\mu n)) \\
&= (\underbrace{-\lambda\mu\langle n,x\rangle+\lambda\mu\langle x,n\rangle}_{=0}+\mu^2\underbrace{\langle n\times x,n\rangle}_{=0,\text{da } n\times x\perp n}, \mu^2\langle n,x\rangle n+\lambda^2x+\lambda\mu(n\times x) \\
&\quad -\lambda\mu(x\times n)-\mu^2((n\times x)\times n)) \\
&= (0,\mu^2\langle n,x\rangle n+\lambda^2x+\lambda\mu(n\times x)-\lambda\mu(x\times n)-\mu^2(x-\langle x,n\rangle n)) \\
&= (0,\mu^2\langle n,x\rangle n+\lambda^2x+\lambda\mu(n\times x)-\lambda\mu(x\times n)-\mu^2x+\mu^2\langle x,n\rangle n)) \\
&= (0,2\mu^2\langle n,x\rangle n+(\lambda^2-\mu^2)x+2\lambda\mu(n\times x)).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir nun $2\mu^2 = 1-\cos(\varphi)$, $\lambda^2-\mu^2=\cos(\varphi)$ und $2\lambda\mu=\sin(\varphi)$, so erhalten wir

$$q(0,x)q^* = (0, x\cos(\varphi)+n\langle n,r\rangle(1-\cos(\varphi))+(n\times x)\sin\varphi).$$

c) Das Quaternion

$$q_1 = \left(\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right), \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

induziert die erste Drehung. Die zweite Drehung wird von

$$q_2 = \left(\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right), \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

und die dritte Drehung von

$$q_3 = \left(\cos\left(\frac{\varphi_3}{2}\right), \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

induziert. Führen wir die Abkürzungen $c_i = \cos(\frac{\varphi_i}{2})$ und $s_i = \sin(\frac{\varphi_i}{2})$ ein, so wird die Gesamtdrehung durch

$$q = q_3 q_2 q_1 = \left(c_3 c_2 c_1 + 1, \begin{pmatrix} c_3 c_2 - c_1 + c_3 s_2 \\ c_1 c_3 s_2 + 1 \\ c_1 c_2 s_3 \end{pmatrix}\right)$$

induziert.

Die Reihenfolge kann nicht vertauscht werden, da Quaternionen nicht kommutativ sind.