8. Übung Lineare Algebra II für M
– Lösungsvorschläge –

Gruppenübungen

(G17) Gegeben sei die Menge der Quaternionen

$$\mathbb{H} := \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

zusammen mit der Addition

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) + (\tilde{a}\mathbf{1} + \tilde{b}\mathbf{i} + \tilde{c}\mathbf{j} + \tilde{d}\mathbf{k}) = (a+\tilde{a})\mathbf{1} + (b+\tilde{b})\mathbf{i} + (c+\tilde{c})\mathbf{j} + (d+\tilde{d})\mathbf{k},$$

sowie der Multiplikation

$$\begin{aligned} & (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot (\tilde{a}\mathbf{1} + \tilde{b}\mathbf{i} + \tilde{c}\mathbf{j} + \tilde{d}\mathbf{k}) \\ = \; & (a\tilde{a} - b\tilde{b} - c\tilde{c} - d\tilde{d})\mathbf{1} + (a\tilde{b} + \tilde{a}b + c\tilde{d} - \tilde{c}d)\mathbf{i} + (\tilde{a}c - b\tilde{d} + a\tilde{c} + \tilde{b}d)\mathbf{j} + (a\tilde{d} + b\tilde{c} - \tilde{b}c + \tilde{a}d)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt folgende Multiplikationstafel:

$\cdot$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

Zeigen Sie, dass das Tripel $(\mathbb{H}, \cdot, +)$ ein Schiefkörper ist.

Hinweis: Das Inverse Element der Multiplikation ist $q^{-1} = \frac{a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Wir zeigen die Eigenschaften (i)-(iv) eines Schiefkörpers:

(i) Sei $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (q_1 + q_2) + q_3 &= ((a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k})) + (a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}) \\ &= ((a_1+a_2)\mathbf{1} + (b_1+b_2)\mathbf{i} + (c_1+c_2)\mathbf{j} + (d_1+d_2)\mathbf{k}) + (a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}) \\ &= (a_1+a_2+a_3)\mathbf{1} + (b_1+b_2+b_3)\mathbf{i} + (c_1+c_2+c_3)\mathbf{j} + (d_1+d_2+d_3)\mathbf{k} \\ &= (a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + ((a_2+a_3)\mathbf{1} + (b_2+b_3)\mathbf{i} + (c_2+c_3)\mathbf{j} + (d_2+d_3)\mathbf{k}) \\ &= (a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + ((a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) + (a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k})) \\ &= q_1 + (q_2 + q_3). \end{aligned}$$

Somit ist die Addition assoziativ. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\ &= (a_1+a_2)\mathbf{1} + (b_1+b_2)\mathbf{i} + (c_1+c_2)\mathbf{j} + (d_1+d_2)\mathbf{k} \\ &= (a_2+a_1)\mathbf{1} + (b_2+b_1)\mathbf{i} + (c_2+c_1)\mathbf{j} + (d_2+d_1)\mathbf{k} \\ &= (a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) + (a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \\ &= q_2 + q_1. \end{aligned}$$

Damit ist die Addition kommutativ.

(ii) Für $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
& (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 \\
= \;& ((a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \cdot (a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k})) \cdot (a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}) \\
= \;& ((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)\mathbf{1} + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1)\mathbf{i} \\
& +(a_2c_1 - b_1d_2 + a_1c_2 + b_2d_1)\mathbf{j} + (a_1d_2 + b_1c_2 - b_2c_1 + a_2d_1)\mathbf{k}) \\
& \cdot(a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}) \\
= \;& (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - c_1c_2a_3 - d_1d_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - c_1d_2b_3 + c_2d_1b_3 \\
& -a_2c_1c_3 + b_1d_2c_3 - a_1c_2c_3 - b_2d_1c_3 - a_1d_2d_3 - b_1c_2d_3 + b_2c_1d_3 - a_2d_1d_3)\mathbf{1} \\
& +(a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 - c_1c_2b_3 - d_1d_2b_3 + a_3a_1b_2 + a_3a_2b_1 + a_3c_1d_2 - a_3c_2d_1 \\
& +a_2c_1d_3 - b_1d_2d_3 + a_1c_2d_3 + b_2d_1d_3 - c_3a_1d_2 - c_3b_1c_2 + c_3b_2c_1 - c_3a_2d_1)\mathbf{i} \\
& +(a_3a_2c_1 - a_3b_1d_2 + a_3a_1c_2 + a_3b_2d_1 - a_1b_2d_3 - a_2b_1d_3 - c_1d_2d_3 + c_2d_1d_3 \\
& +a_1a_2c_3 - b_1b_2c_3 - c_1c_2c_3 - d_1d_2c_3 + b_3a_1d_2 + b_3b_1c_2 - b_3b_2c_1 + b_3a_2d_1)\mathbf{j} \\
& +(a_1a_2d_3 - b_1b_2d_3 - c_1c_2d_3 - d_1d_2d_3 + a_1b_2c_3 + a_2b_1c_3 + c_1d_2c_3 - c_2d_1c_3 \\
& -b_3a_2c_1 + b_3b_1d_2 - b_3a_1c_2 - b_3b_2d_1 + a_3a_1d_2 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 + a_3a_2d_1)\mathbf{k} \\
= \;& (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_1c_2c_3 - a_1d_2d_3 - b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 - b_1c_2d_3 + b_1c_3d_2 \\
& -c_1a_3c_2 + c_1b_2d_3 - c_1a_2c_3 - c_1b_3c_2 - d_1a_2d_3 - d_1b_2c_3 + d_1b_3c_2 - d_1a_3d_2)\mathbf{1} \\
& +(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_1c_2d_3 - a_1c_3d_2 + a_2a_3b_1 - b_2b_3b_1 - c_2c_3b_1 - d_2d_3b_1 \\
& +c_1a_2d_3 + c_1b_2c_3 - c_1b_3c_2 + c_1a_3d_2 - a_3c_2d_1 + b_2d_3d_1 - a_2c_3d_1 - b_3d_2d_1)\mathbf{i} \\
& +(a_2a_3c_1 - b_2b_3c_1 - c_2c_3c_1 - d_2d_3c_1 - b_1a_2d_3 - b_1b_2c_3 + b_1b_3c_2 - b_1a_3d_2 \\
& +a_1a_3c_2 - a_1b_2d_3 + a_1a_2c_3 + a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 + a_3b_2d_1 + c_2d_3d_1 - c_3d_2d_1)\mathbf{j} \\
& +(a_1a_2d_3 + a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_1a_3d_2 + b_1a_3c_2 - b_1b_2d_3 + b_1a_2c_3 + b_1b_3d_2 \\
& -a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - c_2d_3c_1 + c_3d_2c_1 + a_2a_3d_1 - b_2b_3d_1 - c_2c_3d_1 - d_2d_3d_1)\mathbf{k} \\
= \;& (a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \\
& \cdot((a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 - d_2d_3)\mathbf{1} + (a_2b_3 + a_3b_2 + c_2d_3 - c_3d_2)\mathbf{i} \\
& +(a_3c_2 - b_2d_3 + a_2c_3 + b_3c_2)\mathbf{j} + (a_2d_3 + b_2c_3 - b_3c_2 + a_3d_2)\mathbf{k}) \\
= \;& (a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \cdot ((a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \cdot (a_3\mathbf{1} + b_3\mathbf{i} + c_3\mathbf{j} + d_3\mathbf{k})) \\
= \;& q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3).
\end{aligned}$$

Somit ist die Multiplikation assoziativ. Weiterhin liest man aus der Multiplikationstafel $ij = -ji$ ab, sodass die Multiplikation nicht kommutativ ist.

(iii) Das neutrale Element bzgl. der Addition ist das Quaternion $\mathbf{0} := 0\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Denn es gilt für jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
0 + q &= (0\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) + (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \\
&= (0 + a)\mathbf{1} + (0 + b)\mathbf{i} + (0 + c)\mathbf{j} + (0 + d)\mathbf{k} \\
&= a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + c\mathbf{k} = q \\
&= (a + 0)\mathbf{1} + (b + 0)\mathbf{i} + (c + 0)\mathbf{j} + (d + 0)\mathbf{k} \\
&= (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) + (0\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\
&= q + 0.
\end{aligned}$$

Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist das Quaternion $\mathbf{1} := 1\mathbf{1}+0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, denn es gilt für jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
1 \cdot q &= (1\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \\
&= (1a)\mathbf{1} + (1b)\mathbf{i} + (1c)\mathbf{j} + (1d)\mathbf{k} \\
&= a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + c\mathbf{k} = q \\
&= (a \cdot 1)\mathbf{1} + (b \cdot 1)\mathbf{i} + (c \cdot 1)\mathbf{j} + (d \cdot 1)\mathbf{k} \\
&= (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot (1\mathbf{1} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\
&= q \cdot 1.
\end{aligned}$$

(iv) Anhand des Hinweises sehen wir, dass ein Quaternion nicht invertierbar ist, wenn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ ist. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn $a = b = c = d = 0$, also $q = 0$ ist.
Für jedes andere Quaternion $q \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
q \cdot q^{-1} &= (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right) \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}((a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot (a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k})) \\
&= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\mathbf{1}) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Genauso ergibt sich

$$q^{-1} \cdot q = \mathbf{1}.$$

(G18) In dieser Aufgabe werden wir zeigen, wie die Quaternionen $\mathbb{H}$ in die komplexen 2×2 Matrizen eingebettet werden können:

Gegeben seien die folgenden Matrizen aus $M_2(\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{H}$, der von diesen Matrizen aufgespannt wird, d.h.

$$\mathcal{H} = \{\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K \in M_2(\mathbb{C}) \ : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Wir statten diesen Vektorraum mit der von $M_2(\mathbb{C})$ induzierten Multiplikation (Matrizenmultiplikation) aus. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{H}$ zusammen mit dieser Addition und Multiplikation einen Schiefkörper bildet, der isomorph zu den Quaternionen ist.

a) Vervollständigen Sie die Multiplikationstafel

$\cdot$	E	I	J	K
E				
I				
J				
K				

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ ist, d.h. beweisen sie die folgenden Aussagen:

(i) Es ist $0 \in \mathcal{H}$ und mit A ist auch $-A$ in $\mathcal{H}$.

(ii) Es ist $1 = \mathrm{Id}_2$ in $\mathcal{H}$.

(iii) Mit $A, B \in \mathcal{H}$ ist auch $A + B \in \mathcal{H}$ und $AB \in \mathcal{H}$.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \ : \ w, z \in \mathbb{C} \right\}$$

gilt.

d) Wir haben in a)-c) gezeigt, dass $\mathcal{H}$ ein Schiefkörper ist. Zeigen Sie nun, dass $\mathcal{H} \cong \mathbb{H}$ ist, indem sie eine Bijektion angeben.

---

a) Wir erhalten

$\cdot$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-E$	I
K	K	J	$-I$	$-E$

b) (i) Wählen wir $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, so ist $0 \in \mathcal{H}$.

Ist $A \in \mathcal{H}$, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Damit sind ebenfalls $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta \in \mathbb{R}$ und somit $-A \in \mathcal{H}$.

(ii) Mit $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta = 0$ ist $E = \mathrm{Id}_2 \in \mathcal{H}$.

(iii) Sei $A = \alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K \in \mathcal{H}$ und $B = \alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A + B &= (\alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K) + (\alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)E + (\beta_1 + \beta_2)I + (\gamma_1 + \gamma_2)J + (\delta_1 + \delta_2)K. \end{aligned}$$

Mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ sind auch die Summen der Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und somit $A + B \in \mathcal{H}$.

Für die Multiplikation gilt

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\alpha_1 E + \beta_1 I + \gamma_1 J + \delta_1 K) \cdot (\alpha_2 E + \beta_2 I + \gamma_2 J + \delta_2 K) \\ &= (\alpha_1\alpha_2 E^2 + \alpha_1\beta_2 EI + \alpha_1\gamma_2 EJ + \alpha_1\delta_2 EK) \\ &\quad +(\beta_1\alpha_2 IE + \beta_1\beta_2 I^2 + \beta_1\gamma_2 IJ + \beta_1\delta_2 IK) \\ &\quad +(\gamma_1\alpha_2 JE + \gamma_1\beta_2 JI + \gamma_1\gamma_2 J^2 + \gamma_1\delta_2 JK) \\ &\quad +(\delta_1\alpha_2 KE + \delta_1\beta_2 KI + \delta_1\gamma_2 KJ + \delta_1\delta_2 K^2). \end{aligned}$$

Nach a) sind die Produkte der Matrizen wieder Basismatrizen, und Produkte reeler Zahlen sind reele Zahlen. Damit ist auch $AB \in \mathcal{H}$.

c) Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta i & 0 \\ 0 & -\beta i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta i \\ \delta i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -(\gamma - \delta i) & \alpha - \beta i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $z := \alpha + \beta i$ und $w := \gamma + \delta i$, so erhaltem wir

$$\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}.$$

Damit ist jedem Tupel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t \in \mathbb{R}^4$ ein Tupel $(z, w)^t \in \mathbb{C}^2$ und umgekehrt zugeordnet, sodass die Mengen gleich sind.

d) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\
a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} &\longmapsto aE + bI + cJ + dK.
\end{aligned}$$

Die Surjektivität der Abbildung ist offensichtlich. Wir zeigen die Injektivität. Seien also $p := a_1\mathbf{1} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ und $q := a_2\mathbf{1} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ mit $\varphi(p) = \varphi(q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(p) - \varphi(q) &= (a_1E + b_1I + c_1J + d_1K) - (a_2E + b_2I + c_2J + d_2K) \\
&= (a_1 - a_2)E + (b_1 - b_2)I + (c_1 - c_2)J + (d_1 - d_2)K = 0.
\end{aligned}$$

Nach b),(i) muss somit $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ und $d_1 = d_2$ gelten, d.h. $p = q$. Somit ist φ injektiv.