Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
31. Mai und 1. Juni

7. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Skalierung)

(a) Durch welche 3×3-Skalierungsmatrix S (in homogenen Koordinaten) würde diese Seite quadratisch werden?

(b) Welche Veränderung bewirkt die Multiplikation mit einem Faktor $c \neq 0$ der *letzten* homogenen Koordinate jedes Punktes im projektiven Raum?

Lösung:

(a) Die kürzere Seite des A4 Blattes ist etwa $\frac{2}{3}$-mal so lang, wie die längere Seite. Also müssen wir in Richtung der kürzeren Seite um das $\frac{3}{2}$-fache skalieren. O.B.d.A. nehmen wir an, diese Richtung sei die Richtung der ersten Basisvektors. So ergibt sich als Skalierungsmatrix S:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Ein Punkt $(x, y, z, 1)^T$ in homogenen Koordinaten wird durch die oben angegebene Multiplikation zu $(x, y, z, c)^T$. Da wir jedoch auch diesen Punkt als Punkt in homogenen Koordinaten verstehen, ist er derselbe wie $(\frac{1}{c}x, \frac{1}{c}y, \frac{1}{c}z, 1)$. Dies gilt, da in homogenen Koordinaten Punkte, die Vielfache voreinander sind miteinander assoziiert sind.
Letztlich handelt es sich also um eine Skalierung des Raumes mit dem Faktor $\frac{1}{c}$.

Aufgabe G15 (Eulersche Drehwinkel)

In dieser Aufgabe soll es darum gehen sich klar zu machen, dass ein orthogonales Koordinatensystem durch drei Drehungen um Koordinaten-Achsen in ein beliebiges anderes orthogonales Koordinatensystem mit gleichem Ursprung überführt werden kann. Dies meint, dass man jeweils um die aktuellen Koordinatenachsen drehen darf.
Betrachten sie die unten gegebene Serie von Zeichnungen und beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten präzise, wie hier vorgegangen wird. Klären Sie Schritt für Schritt welche Drehungen wie und mit welchem Ziel vorgenommen werden.

Lösung: Die erste Drehung hat zum Ziel die y-Achse so in eine neue Position zu drehen, dass sie orthogonal auf der gewünschten z^*-Achse steht. Hier entsteht also eine y_1-Achse.
Die zweite Drehung um die neu entstandene y_1-Achse soll die entstandene z_1-Achse in die endgültige Position der z^*-Achse bringen. Dies ist möglich, da y_1 bereits orthogonal auf z_1 steht (es handelt

sich um ein orthogonales Koordinatensystem) und auch orthogonal auf z^* steht (nach Konstruktion von y_1). Die z_1-Achse lässt sich also durch eine Drehung um die y_1-Achse in die z^*-Achse überführen.
Nun da die z^*-Achse bereits in ihrer endgültigen Position ist müssen wir nur noch die beiden anderen Achsen in die gewünschte Position bringen. Welche Achse wir hierbei betrachten ist egal. Wir drehen also um die z^*-Achse um das Koordinatensystem ganz in das neue zu überführen.

Aufgabe G16 (Affine und Projektive Abbildungen)

Definition 1. *Eine* affine *Abbildung* $h_{aff} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *ist die Verkettung einer linearen Abbildung mit einer Translation. Sie lässt sich also immer darstellen als* $h_{aff}(x) = Ax + b$*. Wobei* A *die Matrix des linearen Anteils der Abbildung ist und* b *der Translationsvektor.*

Definition 2. *Eine* projektive *Abbildung* $g_{pro} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *ist definiert als:* $g_{pro} = \frac{Ax+b}{<c,x>+\delta}$*. Hier ist* A *die Matrix einer linearen Abbildung von* $\mathbb{R}^d$*,* b, c *Vektoren in* $\mathbb{R}^d$ *und* δ *in* $\mathbb{R}$*.*
Gegeben seinen folgende vier Punkte im $\mathbb{R}^2$: $(0,0)^T$, $(0,1)^T$, $(1,\frac{1}{4})^T$ und $(1,\frac{3}{4})^T$. Diese bilden ein Viereck.

(a) Wie wird dieses Viereck transformiert, wenn wir die projektive Abbildung g_{pro} mit $A = Id_2$, $b = 0$, $c = (1,0)^T$ und $\delta = -2$ anwenden?

(b) Weshalb kann dies keine affine Transformation sein?

(c) Wie sieht die Matrix dieser projektiven Abbildung als Abbildung auf $\mathbb{P}^2$ aus (3×3-Matrix)? Wodurch unterscheidet sich diese Abbildung von allen Abbildungen die Strang angibt?
Hinweis: Versuchen sie zunächst allgemein zu klären wie die Matrix einer projektiven Abbildung in homogenen Koordinaten aussieht.

Lösung:

(a) Die vier Ecken des Vierecks werden jeweils abgebildet auf: $(0,0)^T$, $(0,-\frac{1}{2})^T$, $(-1,-\frac{1}{4})^T$, $(-1,-\frac{3}{4})^T$.

(b) Eine affine Transformation kann kein allgemeines Viereck in ein Parallelogramm abbilden.

(c) Allgemein finden wir als Matrix:
$$\begin{pmatrix} A^T & c \\ b^T & \delta \end{pmatrix}$$
Dies kann man sich gut überlegen, wenn man bedenkt, dass x auf ein beliebiges Vielfaches von $(\frac{Ax+b}{<c,x>+\delta}, 1)^T$ abgebildet werden soll. Die Matrix lässt sich dann für $x \to (Ax + b, <c, x> +\delta)^T$ gut finden.
Die Matrix zu unserer speziellen Abbildung sieht wie folgt aus:
$$M_{g_{\text{aff}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
Im Gegensatz zu Strang transformieren wir hier auch die Ferngerade, die bei Strang immer in sich selbst überführt wurde.

Hausübung

Aufgabe H11 (Nichtlineare Abbildungen durch homogene Koordinaten linear)

(a) Zeigen sie, dass eine Translation (Verschiebung) im Raum ($\mathbb{R}^3$) keine lineare Abbildung ist.

(b) Wie löst man dieses Problem durch homogene Koordinaten? Finden Sie hierzu die Translationsmatrix (4×4) in homogenen Koordinaten für die Verschiebung um den Vektor $(1, 4, 3)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Translation um einen Vektor v und die Translation um den Vektor $-v$ zueinander inverse Matrizen haben.

Lösung:

(a) Eine Translation verschiebt den ganzen Raum, also insbesondere auch den Ursprung. Sei t diese Translationsabbildung. Es gilt also insbesondere:

$$t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$$

Hier sei $\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$ der Vektor um den verschoben wird.

Weiterhin hat man aber für lineare Abbildungen gegeben $t(\lambda v) = \lambda t(v)$. Für $\lambda = 0$ und einen beliebigen Vektor v ist dies jedoch für t nicht richtig, wie die obige Gleichung zeigt. Also ist eine Translation keine lineare Abbildung.

(b) Man betrachtet dazu den gesamten Raum in homogenen Koordinaten. Das heißt die neue letzte Komponente unserer Vektoren ist fest auf 1 gesetzt. Will man nun die Translation als Matrix darstellen erhält man:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&4&3&1\end{pmatrix}$$

(c) Wir sollen zeigen, dass die beiden Translationsmatrizen zu den Vektoren v und $-v$ zueinander invers sind. Zunächst ist intuitiv klar, dass dies der Fall sein sollte, da wir nach dem Verschieben um einen Vektor genau die Rückverschiebung durchführen. Betrachten wir nun die beiden Matrizen. Sie haben die folgende Form:

$$T_v = \begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&\vdots\\\vdots&&\ddots&&0\\v_1&v_2&\dots&v_n&1\end{pmatrix} \text{ und } T_{-v} = \begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&\vdots\\\vdots&&\ddots&&0\\-v_1&-v_2&\dots&-v_n&1\end{pmatrix}$$

Bei Multiplikation der beiden Matrizen ergibt sich:

$$T_vT_{-v} = \begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&\vdots\\\vdots&&\ddots&&0\\v_1-v_1&v_2-v_2&\dots&v_n-v_n&1\end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{n+1}$$

Die beiden Matrizen sind also zueinandr invers.

Aufgabe H12 (Drehung um eine Achse außerhalb des Ursprungs)

(a) Wir möchten im $\mathbb{R}^3$ um die Achse durch den Punkt $(1, 4, 3)^T$ mit Richtungsvektor $(0, 0, 1)^T$ um 30 Grad im Uhrzeigersinn drehen. Wie setzen wir dies mit Hilfe von homogenen Koordinaten um? Geben Sie eine entsprechende Matrix an.

(b) Wo befindet sich der Einheitswürfel nach dieser Transformation im $\mathbb{R}^3$? Geben Sie Koordinaten geschickt gewählter Ecken an.
Hinweis: Wie können Sie Informationen aus der Matrix nutzen?

Lösung:

(a) Damit wir um die gegebene Achse drehen können, müssen wir diese zunächst in den Ursprung verschieben. Dies ist möglich mit der Matrix

$$T_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Danach wollen wir um 30 Grad drehen. Dies entspricht der folgenden Matrix:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) & 0 & 0 \\ \sin(30°) & \cos(30°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Drehung müssen wir rückverschieben. Was mit der bereits in Aufgabe H11 gefundenen Matrix getan wird. Diese nennen wir nun T_+. Als Matrix unserer Transformation ergibt sich also das Produkt:

$$T_- R T_+ =$$

(b) Wir nehmen uns die drei aufspannenden Vektoren des Würfels (die drei Einheitsvektoren) sowie den Ursprung her und wollen deren Bilder finden. Das Bild des Ursprungs ist aus der letzten Zeile der Matrix ablesbar. Für die anderen Einheitsvektoren gilt, dass das Bild die Summe aus der jeweiligen Zeile und der letzten Zeile der Matrix ist. Natürlich müssen wir vorher jeweils den homogenen Anteil, also die 1 in der letzten Komponente wieder abschneiden, damit wir uns wieder im dreidimensionalen befinden.