Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
15., 18. und 21. Mai

5. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Hüllen)

In dieser Aufgabe soll es darum gehen, welche Hüllen wir aus einer Menge von Vektoren bilden können. Es sind sowohl die Definitionen gefragt, als auch geometrische Anschauung.

(a) Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Menge von Vektoren, mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Geben Sie zunächst die Definitionen der Hüllen an, welche Sie aus diesen Vektoren bilden können. (Tipp: Sie kennen mindestens drei.)

(b) Was ist die affine Hülle von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$? Fertigen Sie eine Skizze für die Situation im $\mathbb{R}^2$ an.

(c) Geben sie zeichnerisch die konvexe Hülle für folgende vier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Die *lineare Hülle* der Vektoren ist die Menge aller Linearkombinationen, die sich aus den gegebenen Vektoren bilden lassen:

$$\operatorname{lin}(v_1, \dots, v_k) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Die *affine Hülle* ist die Menge aller affinen Kombinationen der Vektoren, sie bildet den affinen Teilraum der durch die Vektoren aufgespannt wird:

$$\operatorname{aff}(v_1, \dots, v_k) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

Die *konvexe Hülle* ist die Menge aller Konvexkombinationen, die sich aus den gegebenen Vektoren bilden lassen:

$$\operatorname{conv}(v_1, \dots, v_k) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$$

(b) Wir erhalten immer die Gerade durch die beiden Punkte, welche durch die beiden Vektoren (als Ortsvektoren interpretiert) gegeben sind.

(c)

Aufgabe G11 (Affine (Un-)Abhängigkeit)

Definition 1 (Affine Unabhängigkeit). *Die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ eines $\mathbb{K}$–Vektorraumes V heißen affin unabhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ und ist $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ sowie $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$, so folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

Gegeben seien folgende vier Vektoren, wobei $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 affin unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 affin abhängig sind.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $t^2 - t = 1$ gilt. (Rechnen Sie das zunächst kurz nach.)

Lösung:

(a) Zu zeigen ist : $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0$ implizieren, dass $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, 3)$
Mit der zweiten Gleichung gilt $\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$. Also soll gelten:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} - (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix} = 0$$

Aus den ersten drei Zeilen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2(t-1) = 0 \tag{1}$$
$$\lambda_2 = t(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{2}$$
$$(t-1)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \tag{3}$$

Da $t \neq 1$ folgt auch Gleichung (3) sofort, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Also erhalten wir $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = -\lambda_2$. Dan folgt jedoch mit Gleichung (2), dass auch $\lambda_2 = 0$ und damit auch $\lambda_1 = 0$. Wir erhalten also wie gewünscht: $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, 3)$

(b) Wir lösen mit dem Gaussalgorithmus das folgende homogene Gleichungssystem, das hier in Matrixschreibweise gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & -1 & -t & -t \\ t & t & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & 1-t & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & -1 & -t & -t \\ 0 & -1-t^2-t & 1 & t^2-t \\ 0 & -t^2+2t-1 & 1-t & -1+t^2-2t-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & t-1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & 1-t & 1-t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 0 & 1-t^2+t & 1-t^2+t \\ 0 & 0 & 1+t-t^2 & 1+t-t^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Hinzufügen der Gleichung über die Summe der Lambdas
$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 2-t & 1 & t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 0 & 2-t & 1 \end{pmatrix}$$
Es folgt: $\lambda_3 = \frac{-\lambda_4}{2-t}$, da $2-t$ nicht 0 ist. Weiterhin ergibt sich:
$\lambda_2 = t\frac{-\lambda_4}{2-t} - t\lambda_4 = \lambda_4(\frac{t}{2-t} - t)$
$\lambda_1 = \lambda_4(\frac{1-t}{2-t} + t - 1)$ Wir finden also eine Lösung in der nicht alle $\lambda_1 = 0$. Es folgt, dass die Vektoren affin abhängig sind.

Aufgabe G12 (Minkowski Summe)

Definition 2 (Minkowski Summe). *Die* Minkowski Summe *zweier Mengen A und B, wobei $A, B \subset V$ und V ein Vektorraum, ist die Menge welche durch punktweise Addition von Elementen aus A und B entsteht:*

$$A +_{Mink} B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

(a) Bilden Sie graphisch die Minkowski Summe aus $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$ und $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}^2$.

(b) Machen Sie sich zunächst anhand ihrer Skizze klar, dass die obige Minkowski Summe die Projektion eines Würfels ist.

(c) Geben Sie die entsprechende Projektion an.

(d) Zeigen Sie, dass das Bild der konvexen Hülle endlich vieler Punkte unter einer linearen Abbildung die konvexe Hülle der Bilder jener Punkte ist. Zeigen Sie mit Hilfe dessen auch, dass die Minkowski Summe von Strecken von einer linearen Abbildung auf die Minkowski Summe der Bilder der Strecken abgebildet wird.

Lösung:

(a)

(b) Wenn wir die entstehenden Eckpunkte berachten, können wir erkennen, dass es sich um ein Schrägbild eines Würfels handelt.

(c) In der letzten Hausübung haben wir gezeigt, dass eine lineare Abbildung vollständig durch die Bilder der Basisvektoren charakterisiert ist. Wir betrachten also den Würfel, welcher durch die Minkowskisumme folgender Strecken gegeben ist:

$$\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ bestimmen die Ecken dieses Würfels. Nun müssen wir nur noch mit Hilfe der Skizze aus Aufgabenteil (a) die Bilder dieser Vektoren finden und erhalten als eine mögliche Abbildungsmatrix in Bezug auf die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

(d) Gegeben sei die $\operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k)$ für $p_i \in V$, wobei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Zu zeigen ist, dass für eine lineare Abbildung von V in einen weiteren $\mathbb{R}$-Vektorraum W $f : V \to W$ gilt:

$$f(\operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k) = \operatorname{conv}(f(p_1), \dots, f(p_k))$$

Mengengleichheit zeigen wir über zwei Inklusionen.
$f(\operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k) \subseteq \operatorname{conv}(f(p_1), \dots, f(p_k))$:
Sei $x \in f(\operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k$, dann gilt $x = f(\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Dann gilt aber wegen Linearität von f folgende Gleichung: $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(p_i)$ mit den gleichen Aussagen über λ_i.
Also folgt $x \in \operatorname{conv}(f(p_1), \dots, f(p_k))$ und die erste Inklusion ist gezeigt.
$f(\operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k) \supseteq \operatorname{conv}(f(p_1), \dots, f(p_k))$:
Sei $y \in \operatorname{conv}(f(p_1), \dots, f(p_k))$, dann gilt $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(p_i)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Wieder folgt mit Linearität von f dass $y = f(\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i)$ und damit gilt $y \in f(\operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k)$. So ist die zweite Inklusion gezeigt und damit auch die Mengengleichheit.
Die entsprechende Mengengleichheit für Minkowski Summen folgt analog.

Hausübung

Aufgabe H8 (Affine Geraden) (6 Punkte)

Im Vektorraum $\mathbb{K}^2$ über dem Körper $\mathbb{K}$ nennt man für zwei Punkte $a \neq 0$ und p aus $\mathbb{K}^2$ die Menge $\{p + \alpha a \mid \alpha \in K\}$ eine *affine Gerade.*

(a) Zeigen Sie: Zu zwei verschiedenen Punkten a und b des $\mathbb{K}^2$ gibt es genau eine affine Gerade durch a und b, d.h. genau eine affine Gerade, die a und b enthält.

(b) Zeigen Sie: Die affine Gerade durch a und b ist gleich $\{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1\}$.

Lösung:

(a) Annahme: Es gibt zwei verschiedene Geraden durch a und b, nämlich $G_1 := \{c + \alpha d \mid \alpha \in K\}$ und $G_2 := \{e + \beta f \mid \beta \in K\}$. Da $a, b \in G_1, G_2$ gilt, haben wir:

$$a = c + \alpha_1 d = e + \beta_1 f \tag{1}$$
$$b = c + \alpha_2 d = e + \beta_2 f \tag{2}$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $c = e + \beta_1 f - \alpha_1 d$ bzw. $e = c + \alpha_1 d - \beta_1 f$ (3)
(2)-(1) : $d(\alpha_2 - \alpha_1) = f(\beta_2 - \beta_1)$
Da nach Voraussetzung gilt $a \neq b$, gilt auch $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und $\beta_1 \neq \beta_2$
Somit erhalten wir : $d = f\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}$ und $f = d\frac{\alpha_2-\alpha_1)}{\beta_2-\beta_1}$ (4)
Sei nun $x \in G_1$ beliebig, dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit
$x = c + \alpha d =_{(3),(4)} e + \beta_1 f - \alpha_1(f\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}) + \alpha(f\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}) = e + (\beta_1 + \frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}(\alpha - \alpha_1) \in G_2$
Der Beweis zu zeigen, dass $y \in G_2$ auch ein Elemt aus G_1 ist verläuft analog.
Es folgt $G_1 = G_2$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und das Gewünschte ist gezeigt.

(b) Es gilt :
$\{\alpha a + \beta b \,|\, , \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1\} = \{\alpha a + (1-\alpha)b \mid \alpha \in \mathbb{K}\} = \{b + \alpha(a-b) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$
Letzteres ist nach Definition eine Gerade, da $b \in \mathbb{K}^2$ und $0 \neq a - b \in \mathbb{K}^2$. Die Punkte a und b sind in der Geraden enthalten, nämlich für $\alpha = 1$ bzw.$= 0$.

Aufgabe H9 (Momentenkurve und zyklische Polytope) (9 Punkte)

Sei $x(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$ die Momentenkurve in $\mathbb{R}^d$. Wählt man $n \geq d+1$ Punkte $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ aus $\mathbb{R}$, so heißt $C_{d,n} := \operatorname{conv}(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n))$ *zyklisches Polytop* im $\mathbb{R}^d$ mit n Ecken.
Zeigen Sie, dass je $d+1$ Ecken $x(t_{i_0}), \ldots, x(t_{i_d})$ von $C_{d,n}$ affin unabhängig sind.
Hinweis: Zeigen Sie hierfür zunächst, dass die Definition von affiner Unabhängigkeit wie sie in Aufgabe G11 gegeben ist, äquivalent zu der Aussage ist, dass die Vektoren $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ linear unabhängig sind. Nutzen Sie weiterhin die Ihnen bekannte Formel zur Vandermonde Determinante aus.

Lösung: Es ist zu zeigen, dass $x(t_{i_0}), x(t_{i_1}), \ldots, x(t_{i_d})$ affin unabhängig sind. Dies ist äquivalent zur Aussage: $x(t_{i_1}) - x(t_{i_0}), \ldots, x(t_{i_d}) - x(t_{i_0})$ sind linear unabhängig.
Weiterhin gilt:

$$\det\begin{pmatrix} x(t_{i_1}) - x(t_{i_0}) \\ \vdots \\ x(t_{i_d}) - x(t_{i_0}) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t_{i_1} - t_{i_0} & t_{i_1}^2 - t_{i_0}^2 & \ldots & t_{i_1}^d - t_{i_0}^d \\ \vdots & \vdots, & & \vdots \\ t_{i_d} - t_{i_0} & t_{i_d}^2 - t_{i_0}^2 & \ldots & t_{i_d}^d - t_{i_0}^d \end{pmatrix} =_{(Laplacescher Entwicklungssatz)}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & t_{i_1} - t_{i_0} & t_{i_1}^2 - t_{i_0}^2 & \ldots & t_{i_1}^d - t_{i_0}^d \\ \vdots & \vdots, & & \vdots & \\ 1 & t_{i_d} - t_{i_0} & t_{i_d}^2 - t_{i_0}^2 & \ldots & t_{i_d}^d - t_{i_0}^d \end{pmatrix} =_{(\text{Addition des } (t_{i_0})^j\text{-fachen der ersten Spalte auf Spalte } j)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t_{i_0} & t_{i_0}^2 & \ldots & t_{i_0}^d \\ 1 & t_{i_1} & t_{i_1}^2 & \ldots & t_{i_1}^d \\ \vdots & \vdots, & & \vdots & \\ 1 & t_{i_d} & t_{i_d}^2 & \ldots & t_{i_d}^d \end{pmatrix} =_{(\text{Vandermonde Determinante})} \Pi_{0 \leq k < j \leq d}(t_{i_j} - t_{i_k}) \neq 0$$

Die letzte Ungleichheit gilt, da die t_{i_j} paarweise verschieden sind.
Es folgt, dass $x(t_{i_1}) - x(t_{i_0}), \ldots, x(t_{i_d}) - x(t_{i_0})$ linear unabhängig sind und damit auch dass $x(t_{i_0}), x(t_{i_1}), \ldots, x(t_{i_d})$ affin unabhängig sind.