4. Übung Lineare Algebra II für M

– Lösungsvorschläge –

Gruppenübungen

(G9)

a) Wir wählen $S := \tilde{T}^{-1}$.

b) (i) Der Laplacesche Entwicklungssatz für die Determinanten von M lautet (nach der 1. Zeile entwickelt)

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} a_{(r+1)j} \det(M_{(r+1)j}),$$

wobei die Matrix $M_{(r+1)j}$ aus M entsteht, wenn man die j-te Spalte und $r+1$. Zeile streicht.

Nun muss $a_{(r+1)j}$ und $M_{(r+1)j}$ mit Hilfe von $r \times r$ Matrizen ausgedrückt werden. Vertauschen wir nun in der Matrix A die j-te Zeile mit der $(r+j)$-ten, so ergibt sich als Determinante der Zeilen 1 bis r gerade der Koeffizient $a_{(r+1)}$ und als Determinante der Zeilen $r+1$ bis $2r$ ergibt sich $(-1)^{j+1} \det(M_{(r+1)j})$.
Auf der linken Seite steht bisher nur eine Determinante, da schreiben wir einfach $\det(E) = 1$ als Faktor dazu, da ja in den ersten r Zeilen die Einheitsmatrix steht.

(ii) Für $n = 4$ und $r = 2$ sieht die Matrix A wie folgt aus:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entwickeln wir nun M nach der ersten Zeile, so erhalten wir

$$\det(M) = ad - bc.$$

Als Determinanten geschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} & \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ = \quad & \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) - \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ = \quad & -\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) - \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\right) (-1) \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

In Bracketschreibweise erhalten wir damit

$$[1,2][3,4] = -[2,3][1,4] + [1,3][2,4]$$

oder

$$[1,2][3,4] + [2,3][1,4] - [1,3][2,4] = 0.$$

c) Zusammen mit der Gleichung für die Einheitssphäre erhalten wir das System

$$\begin{aligned} [1,2][3,4] + [2,3][1,4] - [1,3][2,4] &= 0 \\ [1,2]^2 + [1,3]^2 + [1,4]^2 + [2,3]^2 + [2,4]^2 + [3,4]^2 &= 1. \end{aligned}$$

Ein Punkt hat in $\mathbb{R}^6$ bezüglich der Standardbasis die Darstellung

$$p = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [1,3] \\ [1,4] \\ [2,3] \\ [2,4] \\ [3,4] \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun nochmal die Matrix von der Form

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so wissen wir nun, dass wir auch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -[2,3] & [1,3] \\ -[2,4] & [1,4] \end{pmatrix}$$

schreiben können. Damit sind 5 Koordinaten unseres Vektors festgelegt, denn $[3,4]$ beschreibt ja gerade die Determinante der unteren 2×2 Matrix. Ausserdem wissen wir, dass $[1,2] = 1$ sein muss. Um dies allgemein zu erreichen multiplizieren wir den Vektor p mit $\frac{1}{[1,2]}$ und legen so eindeutig einen Punkt im $\mathbb{R}^6$ fest, der die Matrix A beschreibt.

Wählen wir einen lin. abhängigen Vektor, der nicht 1 als ersten Eintrag hat, so beschreibt dieser denselben Unterraum wie A, jedoch bezüglich einer anderen Basis.