Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
19. und 20. April

1. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Wiederholung

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Abbildung, Matrix)

Gegeben sei die folgende lineare Abbildung, wobei P_4 der Vektorraum der reellen Polynome mit höchstens Grad 4 sei. Die lineare Abbildung f ordnet einem Polynom seine Ableitung zu.

$$f : P_4 \to P_4,\ f(p) = p'$$

(a) Finden Sie eine Basis von P_4 und bestimmen Sie die Bilder der von Ihnen gewählten Basisvektoren. Geben Sie die Abbildung als Matrix bezüglich der von Ihnen gewählten Basis an.

(b) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung. Geben Sie jeweils eine Basis der beiden Unterräume an.

(c) Prüfen sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen nach.

Lösung:

(a) Eine möglich Basis für P_4 ist $B := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Es gilt: $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$, $f(x^3) = 3x^2$, $f(x^4) = 4x^3$. Hieraus ergibt sich folgende Matrix zur Darstellung der linearen Abbildung:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Alle konstanten Polynome werden auf null abgebildet. Bei allen anderen Polynomen ist dies nicht der Fall. Also gilt:

$$\mathrm{Kern}(f) = \{p \in P_4 \mid p \text{ konstant}\}$$

Eine Basis für den Kern ist $B_{Kern} = \{1\}$.
Wir erhalten nicht mehr alle Polynomen im Vektorraum P_4 nach dem Ableiten. Wir erhalten lediglich Polynome von höchstens Grad 3. Es ergibt sich also für das Bild:

$$\mathrm{Bild}(f) = \{p \in P_4 \mid p \text{ hat höchstens Grad } 3\} = P_3$$

Eine mögliche Basis für das Bild ist $B_{Bild} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) Die allgemeine Dimensionsformel für lineare Abbildungen $f : V \to W$ besagt:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)).$$

In unserer Aufgabe gilt: $\dim(P_4) = 5$, $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$ und $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 4$. Entsprechendes Einsetzen in die Dimensionsformel liefert $5 = 1 + 4$, also eine wahre Aussage.

Aufgabe G2 (Minitest)

Welche der folgenden Mengen haben die Struktur eines Vektorraums, bzw. eines Untervektorraums?

- ☒ $A := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
- ☒ $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \right\}, B \subseteq \mathbb{R}^3$
- ☐ $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{Q}^2$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$)
- ☒ $C \subseteq A\,,\ C := \{f \in A \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$

Aufgabe G3 (Minitest)

Welche der folgenden Funktionen sind linear?

- ☒ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$
- ☐ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$
- ☒ $h : \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathbb{R},\ (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R},\ h((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} a_n$
- ☐ $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ j(x) = x + 3$

Hausübung

Aufgabe H1 (Rückblick) (15 Punkte)

Hier sind Ihnen 10 Themengebiete gegeben, welche in der Vorlesung Lineare Algebra I behandelt wurden. Ihre Aufgabe ist es, Ihre Unterlagen des vergangenen Semesters durchzusehen und eine Bestandaufnahme Ihres Wissens durchzuführen. Wir wünschen uns dies in Form eines Aufsatzes. Insbesondere sollte klar herausgestellt werden, welche der Themen Sie bereits gut beherrschen und in welchen Themengebieten Sie sich unsicher fühlen, bzw. welche Themen Ihnen große Probleme bereiten. Hier ist nicht gemeint, dass sie einfach die Themen in drei Kategorien packen: verstanden, schwierig, nicht verstanden. Wir bitten um Darstellung von Problemen mit Themengebieten, insbesondere auch anhand der Übungsaufgaben des letzten Semesters. Sehen Sie die Übungsaufgaben durch und versuchen sie diese den Themengebieten zuzuordnen. Erwähnen Sie ruhig auch Aufgaben, die Ihnen nun schon leicht fallen, doch bitte auch Aufgaben mit denen Sie auch jetzt noch Probleme haben.

Nehmen Sie diese Aufgabe bitte sehr ernst. Sie soll den Veranstaltern helfen gute Arbeit zu leisten. Wir sind auf Ihre Rückmeldung angewiesen, um Ihnen beim Lernen zu helfen.

- Vektorraum, lineare Unabhängingkeit
- Lineare Abbildung
- Basis eines Vektorraums, Dimension

- Lineare Abbildungen und Matrizen
- Determinante
- Skalarprodukt
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Basistransformation
- Matrizenkalkül
- algebraische Strukturen (Gruppe, Körper, ...), Homomorphismus