Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
12. und 13. Juli

13. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Injektiv? Surjektiv?)
Seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen U, V, W.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi \circ \varphi : U \to W$ linear ist.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine kurze Argumentation oder ein Gegenbeispiel.

(i) $\psi \circ \varphi$ injektiv impliziert ψ injektiv.
(ii) $\psi \circ \varphi$ injektiv impliziert φ injektiv.
(iii) $\psi \circ \varphi$ surjektiv impliziert ψ surjektiv.
(iv) $\psi \circ \varphi$ surjektiv impliziert φ surjektiv.

(Zusatzaufgabe) Gilt auch die Umkehrung der in (a) gemachten Aussage? Falls die Verknüpfung zweier Funktionen linear ist, waren dann auch die einzelnen Funktionen linear?

Aufgabe G27 (Komplexe Einheitswurzeln)
In dieser Aufgabe, wollen wir uns noch einmal die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ betrachten.

(a) Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $e^{i\varphi}$ geschrieben werden kann als $\cos\varphi + i \sin\varphi$.
Hinweis: Sortieren Sie die Summanden der Potenzreihe nach reellen und komplexen Summanden.

(b) Zeigen Sie, dass die komplexe Zahl $e^{i\varphi}$ Norm 1 hat. Machen Sie sich die Situation geometrisch klar.

(c) Geben Sie alle Lösungen der komplexen Gleichung $z^n = 1$ an. Visualisieren Sie die Lösungen für $n = 2, 3, 4$.

Aufgabe G28 (Kern und Bild)
Seien V, W endlich deimensionale Vektorrräume über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $\dim(\text{Bild } \varphi) \leq \dim(V)$
(ii) $\dim(\text{Kern } \varphi) \leq \dim(V)$
(iii) $\dim(\text{Bild } \varphi) \leq \dim(W)$

(iv) $\dim(\text{Kern } \varphi) \leq \dim(W)$

(b) Sei wieder $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und A_φ zugehörige Matrix. Welcher Zusammenhang gilt zwischen dem Rang von A_φ und der Dimension von $\text{Bild}(\varphi)$.

Hausübung

Aufgabe H24 (Lösbarkeit von Gleichungssystemen) (3 Punkte)

Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit des Systems $Ax = b$ und dem Rang der Matrix A sowie dem Rang der um die Spalte b erweiterten Matrix $(A|b)$ her. Geben Sie eine geometrische Interpretation.

Aufgabe H25 (Komplexe Zahlen) (6 Punkte)

Komplexe Multiplikation und gewisse Additionstheoreme sollen in Verbindung gesetzt werden. Betrachten Sie hierfür zunächst zwei komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis, wobei eine $\cos\varphi + i\sin\varphi$ und die zweite $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ ist. Stellen Sie die Situation graphisch dar. Verallgemeinern Sie dies im Anschluss auf $\cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\cos\psi + i\sin\psi$.

Aufgabe H26 (Halbräume und gerichtete Abstände) (6 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 2$.

(a) Zeichnen Sie die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem. Welche Normalenvektoren können Sie für diese Hyperebene des $\mathbb{R}^2$ angeben? Geben Sie eine Hessesche Normalform zu dieser Ebene an.

(b) Betrachten Sie nun die Ungleichung $-\frac{2}{3}x + y \leq -2$. Markieren Sie den Teil der Ebene $\mathbb{R}^2$, der diese Ungleichung erfüllt.

(c) Erklären Sie, warum das Einsetzen eines Punktes in die Hessesche Normalform der Hyperebene den (gerichteten) Abstand des Punktes zu dieser Hyperebene beschreibt.
Setzen sie die beiden Punkte $A := (1, 6)^T$ und $B := (6, 1)^T$ in ihre gewählte Hessesche Normalform ein. Was stellen Sie fest? Geben Sie die Auswirkung des von Ihnen gewählten Normalenvektors in der Hesseschen Normalform auf das jeweilige Ergebnis an.
Sicher verstehen Sie nun, warum wir den Abstand im Titel der Aufgabe *gerichtet* genannt haben.