



# 11. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

## Gruppenübung

### Aufgabe G26 (Einstieg)

Zeige, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in  $\mathbb{R}$  keine Jordannormalform besitzt.

### Aufgabe G27 (Ähnliche Matrizen)

(a) Zeige, daß ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

*Zur Erinnerung:* Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißen *ähnlich*, falls es eine invertierbare Matrix  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt, sodaß  $B = S^{-1}AS$  gilt.

(b) Seien  $A$  und  $B$  ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen das gleiche Minimalpolynom haben.

### Aufgabe G28 (Jordan-Normalform)

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe G29 (Jordan-Normalform, kann auch als zusätzliche Hausaufgabe gemacht werden)

Berechnen Sie die Jordan-Normalform zu folgender Matrix:

$$B := \begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & -9 & 6 \\ 7 & -6 & -13 & 9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Eigenwerte der Matrix sind 1 und 2.

## Hausübung

### Aufgabe H20 (Jordan-Normalform I)

(8 Punkte)

Gib reelle Matrizen  $A_i$  in Jordannormalform mit den folgenden Eigenschaften an:

- (a)  $A_1$  hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.
- (b)  $A_2$  hat den Eigenwert  $-1$  mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.
- (c)  $A_3$  hat den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 und den Eigenwert  $-2$  mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.
- (d) Die Matrizen  $A_4$  und  $A_5$  haben beide den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2, haben keine weiteren Eigenwerte und sind trotzdem nicht ähnlich.
- (e) Bestimmen Sie für alle Matrizen  $A_i$  jeweils das Minimalpolynom.

### Aufgabe H21 (Jordan-Normalform II)

(7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Jordan-Normalform bis auf Reihenfolge der Jordankästchen eindeutig ist.