Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
31. Mai und 1. Juni

7. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Skalierung)

(a) Durch welche 3×3-Skalierungsmatrix S (in homogenen Koordinaten) würde diese Seite quadratisch werden?

(b) Welche Veränderung bewirkt die Multiplikation mit einem Faktor $c \neq 0$ der *letzten* homogenen Koordinate jedes Punktes im projektiven Raum?

Aufgabe G15 (Eulersche Drehwinkel)

In dieser Aufgabe soll es darum gehen sich klar zu machen, dass ein orthonormiertes Koordinatensystem durch drei Drehungen um Koordinaten-Achsen in ein beliebiges anderes orthonormiertes Koordinatensystem gleicher Orientierung mit gleichem Ursprung überführt werden kann. Dies meint, dass man jeweils um die aktuellen Koordinatenachsen drehen darf.
Betrachten sie die unten gegebene Serie von Zeichnungen und beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten präzise, wie hier vorgegangen wird. Klären Sie Schritt für Schritt welche Drehungen wie und mit welchem Ziel vorgenommen werden.

Aufgabe G16 (Affine und Projektive Abbildungen)

Definition 1. *Eine* affine *Abbildung* $h_{aff} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *ist die Verkettung einer linearen Abbildung mit einer Translation. Sie lässt sich also immer darstellen als* $h_{aff}(x) = Ax + b$. *Wobei* A *die Matrix des linearen Anteils der Abbildung ist und* b *der Translationsvektor.*

Definition 2. *Eine* projektive *Abbildung* $g_{pro} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *ist definiert als:* $g_{pro} = \frac{Ax+b}{<c,x>+\delta}$. *Hier ist* A *die Matrix einer linearen Abbildung von* $\mathbb{R}^d$, b, c *Vektoren in* $\mathbb{R}^d$ *und* δ *in* $\mathbb{R}$.

Gegeben seinen folgende vier Punkte im $\mathbb{R}^2$: $(0,0)^T$, $(0,1)^T$, $(1,\frac{1}{4})^T$ und $(1,\frac{3}{4})^T$. Diese bilden ein Viereck.

(a) Wie wird dieses Viereck transformiert, wenn wir die projektive Abbildung g_{pro} mit $A = Id_2$, $b = 0$, $c = (1,0)^T$ und $\delta = -2$ anwenden?

(b) Weshalb kann dies keine affine Transformation sein?

(c) Wie sieht die Matrix dieser projektiven Abbildung als Abbildung auf $\mathbb{P}^2$ aus (3×3-Matrix)? Wodurch unterscheidet sich diese Abbildung von allen Abbildungen die Strang angibt?
Hinweis: Versuchen sie zunächst allgemein zu klären wie die Matrix einer projektiven Abbildung in homogenen Koordinaten aussieht.

Hausübung

Aufgabe H11 (Nichtlineare Abbildungen durch homogene Koordinaten linear) (6 Punkte)

(a) Zeigen sie, dass eine Translation (Verschiebung) im Raum ($\mathbb{R}^3$) keine lineare Abbildung ist.

(b) Wie löst man dieses Problem durch homogene Koordinaten? Finden Sie hierzu die Translationsmatrix (4×4) in homogenen Koordinaten für die Verschiebung um den Vektor $(1,4,3)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Translation um einen Vektor v und die Translation um den Vektor $-v$ zueinander inverse Matrizen haben.

Aufgabe H12 (Drehung um eine Achse außerhalb des Ursprungs) (9 Punkte)

(a) Wir möchten im $\mathbb{R}^3$ um die Achse durch den Punkt $(1,4,3)^T$ mit Richtungsvektor $(0,0,1)^T$ um 30 Grad im Uhrzeigersinn drehen. Wie setzen wir dies mit Hilfe von homogenen Koordinaten um? Geben Sie eine entsprechende Matrix an.

(b) Wo befindet sich der Einheitswürfel nach dieser Transformation im $\mathbb{R}^3$? Geben Sie Koordinaten geschickt gewählter Ecken an.
Hinweis: Wie können Sie Informationen aus der Matrix nutzen?

Vollversammlung aller Mathematikstudenten

Dienstag, 5.6.07, 16:15 Uhr, S103/23