Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Bokowski
D. Frisch
N. Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 24/25.05.2007

Lineare Algebra II für M, HLM, CSB, CS
6. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G12 Konfigurationen

Gegeben seien zwei Mengen von jeweils n Vektoren im $\mathbb{R}^3$, welche eine (n_4)-Punkt-Geraden-Konfiguration in der projektiven Ebene in homogenen Koordinaten beschreiben.

a) Wie entscheiden Sie, welche der Mengen die Punkte, und welche die Geraden beschreibt?

b) Was müssen Sie prüfen, um sicher zu sein, dass tatsächlich eine (n_4)-Konfiguration in der projektiven Ebene vorliegt? Geben Sie Anzahlen dazu an.

   Hinweis: Stellen Sie eine Inzidenz-Matrix auf, die Punkte und Geraden in Beziehung setzt.

c) Gibt es eine (10_3)-Konfiguration, die nicht mit der Desarguekonfiguration übereinstimmt?

Aufgabe G13

Gegeben sei der 4-dimensionale Einheitswürfel $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$.

a) Schneiden Sie den Würfel mit der Hyperebene, welche durch den Normalenvektor $(1, 1, 1, 1)^t$ beschrieben wird und durch den Mittelpunkt des Würfels verläuft. Welcher Schnittkörper entsteht hierbei?

b) Verschieben Sie nun die Hyperebene parallel. Wie verändert sich der Schnittkörper?

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den 3-dimensionalen Fall.

Aufgabe H10 polare Körper (15 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir den polaren Körper eines 3-dimensionalen Würfels im 4-dimensionalen Raum ermitteln.

Gegeben Sei die Hyperebene $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ im $\mathbb{R}^4$.

a) Geben Sie die Ecken eines regulären 3-dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge 2 an, der in der Hyperebene liegt und den Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ hat.

Hinweis: Betrachten Sie die 3 paarweise zueinander orthogonalen Vektoren zur Beschreibung der Kanten

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Jede quadratisch Seite des Würfels spannt einen konvexen, 3-dimensionalen Kegel auf. Die affine Hülle dieses Kegels ist ein 3-dimensionaler Vektorraum, der durch den äußeren Normalenvektor beschrieben werden kann. Geben sie die 6 äußeren Normalenvektoren zu den Würfelseiten an.

Hinweis: Der Normalenvektor muß auf den Ortsvektoren der Ecken senkrecht stehen.

c) Betrachten Sie nun die Ursprungsgeraden mit den Normalenvektoren aus b) als Richtungsvektoren. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der Hyperebene $x_1+x_2+x_3+x_4 = -2$.
Diese Schnittpunkte bilden die Ecken des zum Würfel polaren Körpers. Was für einen Körper bilden diese Punkte als konvexe Hülle?