Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
15., 18. und 21. Mai

5. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II"

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Hüllen)

In dieser Aufgabe soll es darum gehen, welche Hüllen wir aus einer Menge von Vektoren bilden können. Es sind sowohl die Definitionen gefragt, als auch geometrische Anschauung.

(a) Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Menge von Vektoren, mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Geben Sie zunächst die Definitionen der Hüllen an, welche Sie aus diesen Vektoren bilden können. (Tipp: Sie kennen mindestens drei.)

(b) Was ist die affine Hülle von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$? Fertigen Sie eine Skizze für die Situation im $\mathbb{R}^2$ an.

(c) Geben sie zeichnerisch die konvexe Hülle für folgende vier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G11 (Affine (Un-)Abhängigkeit)

Definition 1 (Affine Unabhängigkeit). *Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ eines $\mathbb{K}$–Vektorraumes V heißen affin unabhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ und ist $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ sowie $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$, so folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

Gegeben seien folgende vier Vektoren, wobei $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 affin unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 affin abhängig sind.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $t^2 - t = 1$ gilt. (Rechnen Sie das zunächst kurz nach.)

Aufgabe G12 (Minkowski Summe)

Definition 2 (Minkowski Summe). *Die* Minkowski Summe *zweier Mengen A und B, wobei $A, B \subset V$ und V ein Vektorraum, ist die Menge welche durch punktweise Addition von Elementen aus A und B entsteht:*

$$A +_{Mink} B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

(a) Bilden Sie graphisch die Minkowski Summe aus $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$ und $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}^2$.

(b) Machen Sie sich zunächst anhand ihrer Skizze klar, dass die obige Minkowski Summe die Projektion eines Würfels ist.

(c) Geben Sie die entsprechende Projektion an.

(d) Zeigen Sie, dass das Bild der konvexen Hülle endlich vieler Punkte unter einer linearen Abbildung die konvexe Hülle der Bilder jener Punkte ist. Zeigen Sie mit Hilfe dessen auch, dass die Minkowski Summe von Strecken von einer linearen Abbildung auf die Minkowski Summe der Bilder der Strecken abgebildet wird.

Hausübung

Aufgabe H8 (Affine Geraden) (6 Punkte)

Im Vektorraum $\mathbb{K}^2$ über dem Körper $\mathbb{K}$ nennt man für zwei Punkte $a \neq 0$ und p aus $\mathbb{K}^2$ die Menge $\{p + \alpha a \mid \alpha \in K\}$ eine *affine Gerade.*

(a) Zeigen Sie: Zu zwei verschiedenen Punkten a und b des $\mathbb{K}^2$ gibt es genau eine affine Gerade durch a und b, d.h. genau eine affine Gerade, die a und b enthält.

(b) Zeigen Sie: Die affine Gerade durch a und b ist gleich $\{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1\}$.

Aufgabe H9 (Momentenkurve und zyklische Polytope) (9 Punkte)

Sei $x(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ die Momentenkurve in $\mathbb{R}^d$. Wählt man $n \geq d+1$ Punkte $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ aus $\mathbb{R}$, so heißt $C_{d,n} := \operatorname{conv}(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$ *zyklisches Polytop* im $\mathbb{R}^d$ mit n Ecken.

Zeigen Sie, dass je $d+1$ Ecken $x(t_{i_0}), \dots, x(t_{i_d})$ von $C_{d,n}$ affin unabhängig sind.

Hinweis: Zeigen Sie hierfür zunächst, dass die Definition von affiner Unabhängigkeit wie sie in Aufgabe G11 gegeben ist, äquivalent zu der Aussage ist, dass die Vektoren $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_k - v_1$ linear unabhängig sind. Nutzen Sie weiterhin die Ihnen bekannte Formel zur Vandermonde Determinante aus.