Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Bokowski
D. Frisch
N. Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 10/11.05.2007

Lineare Algebra II für M, HLM, CSB, CS
4. Übung

Gruppenübungen

Die Spalten einer $n \times r$ Matrix U $(n > r)$ mit vollem Rang r spannen einen r-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ auf. Dieser Unterraum ist von der gewählten Basis des $\mathbb{R}^n$ unabhängig, d.h. transformieren wir die Matrix U mit einer nichtsingulären $r \times r$ Matrix S aus GL_r, so stimmen der von U und der von US aufgespannte r-dimensionale Unterraum überein.

Wir werden auf diesem Übungsblatt ein Konzept entwickeln, welches die r-dimensionalen Unterräume U des $\mathbb{R}^n$ unabhängig von einer gewählten Basis in U beschreibt. Hierbei wird sich herausstellen, dass ein enger Zusammenhang mit dem Chirotop von U besteht (vgl. 3. Übungsblatt).

Zur Erläuterung ist es zweckmäßig, sich zunächst einer $2r \times r$ Matrix $\tilde{A} = \binom{\tilde{T}}{\tilde{M}}$ zuzuwenden. Allgemein kann man dann diese Matrix $\tilde{A}$ als Teil der $n \times r$ Matrix betrachten (für $n \geq 2r$) oder für den Fall $r < n < 2r$ wiederholt man die ersten Zeilen von $\tilde{T}$ bis man eine $2r \times r$ Matrix erhält. Wir nehmen wiederum an, dass die Matrix $\tilde{A}$ vollen Rang r hat und sich eine $r \times r$ Matrix mit vollem Rang insbesondere in den ersten r Zeilen von $\tilde{A}$ befindet.

Aufgabe G9

Gegeben Sei eine $2r \times r$ Matrix $\tilde{A}$, wobei die ersten r Zeilen vollen Rang haben.

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} \tilde{T} \\ \\ \tilde{M} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{r1} & \dots & \tilde{a}_{rr} \\ \tilde{a}_{(r+1)1} & \dots & \tilde{a}_{(r+1)r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{(2r)1} & \dots & \tilde{a}_{(2r)r} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_r$ so gibt, dass

$$A := \tilde{A}S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ a_{(r+1)1} & \dots & a_{(r+1)r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(2r)1} & \dots & a_{(2r)r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ \\ M \end{pmatrix}$$

ist.

b) (i) Verwenden Sie nun den Laplaceschen Entwicklungssatz für die Determinante von M und machen Sie sich klar, dass sich alle in dieser Formel auftretenden Summanden als Produkte von jeweils zwei Determinanten von $r \times r$ Teilmatrizen der $2r \times r$ Matrix A schreiben lassen.

(ii) Bestimmen Sie nun eine Gleichung für den Fall $n = 4$ und $r = 2$, indem sie nach einer Zeile entwickeln.

c) Die Werte der $\binom{4}{2} = 6$ Determinanten der Gleichung aus b) (ii) interpretieren wir nun als Koordinaten im $\mathbb{R}^6$. Man nennt sie *Plückerkoordinaten* des 2-dimensionalen Teilraums im $\mathbb{R}^4$, der durch die zwei Spaltenvektoren der 4×2 Matrix aufgespannt wird.

Zeigen Sie, dass durch den Schnitt dieser Fläche mit der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^6$ Punkte bestimmt werden, die die 2-dimensionalen Teilräume repräsentieren.

Hinweis: Starten Sie mit einem Vektor im $\mathbb{R}^6$ in Plückerkoordinaten und überlegen Sie sich, wo diese in der Matrix A auftauchen.

Aufgabe H6 (5 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{R}^{\binom{n}{r}}$ ein Punkt im Schnitt aller Flächen aus G9 b) (i).

a) Zeigen Sie, dass dann λp für $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ebenfalls im Schnitt aller Flächen liegt.

b) Welche Eigenschaft gibt das Chirotop χ zu diesem Punkt auf dem Kegel in $\mathbb{R}^{\binom{n}{r}}$ an?

Aufgabe H7 (10 Punkte)

Gegeben seien 7 Punkte $p_1, \ldots, p_7$ im $\mathbb{R}^2$ in allgemeiner Lage, d.h. keine drei Punkte liegen auf einer Geraden. Wir werden nun die konvexe Hülle dieser Punkte allein mit Hilfe des Chirotops bestimmen.

Dazu bestimmen wir die homogenen Koordianten dieser 7 Punkte und schreiben diese als Zeilen in eine Matrix. Wir erhalten so eine 7×3 Matrix A. Das Chirotop $\chi(A)$ dieser Matrix enthält alle Informationen um die konvexe Hülle der Punkte $p_1, \ldots, p_7$ zu bestimmen.

Gegeben sei nun das Chirotop

$$\begin{aligned}\chi(A) \quad = \quad & (\underset{[1,2,3]}{+1}, +1, +1, +1, +1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, \\ & \underset{[2,3,4]}{+1}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, \underset{[3,4,5]}{-} 1, -1, -1, +1, -1, -1, \\ & \underset{[4,5,6]}{+} 1, -1, -1, \underset{[5,6,7]}{-} 1)^t.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die konvexe Hülle der Punkte $p_1 \ldots, p_7$ indem Sie angeben, welche der Punkte $p_1, \ldots, p_7$ Eckpunkte sind.

Hinweis: Ausdrücke der Form [i,j,k] geben an, auf welcher Seite der Gerade durch die Punkte p_i und p_j der Punkt p_k liegt.