Fachbereich Mathematik
Prof. J. Bokowski
Dennis Frisch, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
3. und 4. Mai

3. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II“

Gruppenübung

Aufgabe G6 (positiv definite Matrizen)

Sei M eine positiv definite Matrix, dann gilt:

- ☐ Alle Eigenwerte von M sind größer gleich null.
- ☐ M hat vollen Rang.
- ☐ Der Kern der zu M gehörigen linearen Abbildung $x \to Mx$ ist trivial.
- ☐ Die Determinanten der linken oberen quadratischen Teilmatrizen habe positives Vorzeichen.
- ☐ Für alle x gilt, $x^T Mx \geq 0$.
- ☐ Falls $x^T Mx = 0$, dann ist $x = 0$.

Aufgabe G7 (positiv definite Matrizen)

Stellen Sie möglichst geschickt fest, welche der folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Skizziere die Menge der Punkte x, die folgende Gleichung erfüllen $x^T Dx = 4$.

Aufgabe G8 (Chirotop einer $m \times r$ Matrix)

Für Vektoren des $\mathbb{R}^n$ ist die *lexikographische Ordnung* folgendermaßen definiert:
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ist $x_1 < y_1$, so gilt $x <_{lex} y$. Falls für alle $i < k$ gilt $x_i = y_i$, aber $x_k < y_k$, so gilt ebenfalls $x <_{lex} y$.

(a) Ordnen sie folgende Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ lexikographisch.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Das *Chirotop* $\chi(A)$ einer $m \times r$ Matrix A, mit $m > r$ ist wie folgt definiert:
Das Chirotop ist ein Vektor mit m über r Einträgen, die jeweils das Vorzeichen der Determinanten der $r \times r$ Teilmatrizen von A enthalten, welche durch Auswahl von r Zeilen aus A gebildet werden. Die Vorzeichen der Deterimanten werden nach den Zeilenindizes der Teilmatrizen lexikographisch geordnet. Weiterhin assoziiert man $\chi(A)$ mit $-\chi(A)$. Ein Vektor und sein Negatives werden beim Chirotop also nicht unterschieden.
Berechnen Sie das Chirotop $\chi(A)$ zu folgender 4×3 Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein *Kegel* K im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge von Vektoren für die gilt:

- $(\forall k \in K)\ (\forall \lambda \geq 0)\ \lambda k \in K$ (alle nichtnegativen Vielfachen von Vektoren im Kegel sind wieder im Kegel)
- $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall k_1, \ldots k_n \in K)\ (\forall \lambda_1, \ldots \lambda_n \geq 0)\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i \in K$ (die positive Hülle von Vektoren aus K liegen wieder in K).

(c*) Betrachten sie nun auch das Chirotop der Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Interpretieren sie die Chirotope aus Aufgabenteilen (b) und (c) bezüglich des enthalten Seins des Vektors in der vierten Zeile der Matrizen im Kegel, der aus den ersten drei Zeilen der Matrix aufgespannt wird. Machen Sie sich die Situation auch graphisch klar, indem sie den betreffenden Kegel zeichnen.

(c) Auf welche Weise könnten sie noch nachprüfen, dass die entsprechenden Vektoren in der vierten Zeile im Kegel liegen, oder nicht?

Hausübung

Aufgabe H4 (Basistransformation) (9 Punkte)

Gegeben seien in Bezug auf die Standardbasis

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wobei mit A die zu der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto Ax$ gehörige Matrix gemeint ist.

(a) Stellen Sie den Vektor b nun zur Basis $B := \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ dar.

(b) Geben Sie die Transformationsmatix T an welche Vektoren in Standardbasis in Vektoren in Basis B umwandelt.

(c) Stellen Sie die Matrix A so dar, dass sie die lineare Abbildung in Bezug auf die Basis B darstellt.

(d) Zeigen Sie, dass die Bilder der Basisvektoren genügen, um eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen zu charakterisieren.

Aufgabe H5 (Invarianzeigenschaft des Chirotops) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Chirotop einer $m \times r$ Matrix sich nicht verändert, wenn man mit Matrizen aus GL_r von rechts multipliziert.