Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Bokowski
D. Frisch
N. Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 26/27.04.2007

Lineare Algebra II für M, HLM, CSB, CS
2. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G4 Hauptachsentransformation

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Matrix in Eigenvektorbasis.

Aufgabe G5 Äquivalenzrelationen

Gegeben sei die Menge $X_1 := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zusammen mit der Relation $\sim$

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

a) Prüfen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ und geben Sie eine geometrische Interpretation wieder.

c) Betrachten Sie nun den Raum $X_2 := X_1/\sim$, den Raum aller Äquivalenzklassen unter der Relation $\sim$. Wie kann man diesen Raum geometrisch beschreiben?

d) Betrachten Sie nun $Y := \mathbb{S}^2$, zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x = \pm y.$$

Zeigen Sie, dass $Y/\sim \;\cong X_2$ ist.

Aufgabe H2 (10 Punkte)

Gegeben Sei der Raum $M_n(\mathbb{R})$, der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Relation eine Äquivalenzrelation bildet[1]:

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists S \in GL_n(\mathbb{R}),\ \text{sodass } A = SBS^{-1} \text{ ist.}$$

Diese Äquivalenzrelation heisst *Ähnlichkeit*.

b) Zeigen Sie, dass folgende Matrizen ähnlich sind:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Was bedeutet es, dass zwei Matrizen ähnlich zueinander sind? Was sagt das über die linearen Abbildungen aus, die von diesen Matrizen induziert werden?

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

[1] GL_n bezeichnet die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$.