Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
11.07.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 46 – offene/abgeschlossene Mengen :

Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $X := \{x \in U : f(x) \neq c\}$ ist offen.

(b) Zeigen Sie auf zwei Weise, dass die Niveaumenge $\{x \in U : f(x) = c\}$ abgeschlossen ist.

(c) Geben Sie eine unstetige Funktion f und c an, für die die Aussagen (a) und (b) verletzt sind.

Aufgabe 47 – Extremwerte:

Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Ferner sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(t) = F(t, 0)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Wenn f in 0 ein Extremum annimmt, was sagt dazu der Satz über Lagrange-Multikatoren über F aus? Beweisen Sie dieselbe Aussage direkt.

Aufgabe 48 – Volumenberechnung:

Berechnen Sie das Volumen der skizzierten Pyramide mit Grundfläche $G := [-1, 1]^2$ und Höhe 1.

Hinweis: Betrachten Sie die Pyramide nur über dem ersten Quadranten $Q := [0, 1]^2$. Sie wird nach oben begrenzt durch den Graphen einer Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$.

(i) Was sind die Gleichungen der beiden Ebenen, die f stückweise beschreiben?

(ii) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x \mapsto f(x, y)$ für festes $y \in [0, 1]$, und berechnen Sie $\int_0^1 f(x, y)\, dx$.

(iii) Berechnen Sie $\int_Q f(x, y)\, dxdy$. Was ist das Volumen der Pyramide?