Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
04.07.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 43 – Wiederholung:

(i) Sei $X = \mathbb{R}$ und $\{(n, n+3) : n \in \mathbb{Z}\}$ eine Überdeckung von X. Besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung?

(ii) Geben Sie eine endliche Überdeckung von $\mathbb{R}$ an.

(iii) Entscheiden Sie anhand der Heine-Borel-Eigenschaft, welche der folgenden Mengen kompakt sind.

(a) Der metrische Raum $X = \{$ Fisch, Gemüse, Olivenöl$\}$ mit der Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \neq y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(iv) Sei X kompakt und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion.
Beweisen Sie mit der Überdeckungseigenschaft, dass $f(X) \subset Y$ kompakt ist.

Aufgabe 44 – Wendelfläche:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = y\cos z - x \sin z$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist und die Menge $M := f^{-1}(0)$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie Tangential- und Normalraum an $p := (x,y,z) \in M$.

(c) Geben Sie eine lokale Graphendarstellung um den Punkt $(1,0,0)$ an.

(d) Zeigen Sie, dass $M \cap \{z = c\}$ eine Gerade ist. Bestimmen Sie den Winkel dieser Geraden zur x-Achse.

(e) Warum nennt man M *Wendelfläche*?

Aufgabe 45 – Globale Umkehrbarkeit:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und die Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ stetig differenzierbar. Weiter möge es eine umkehrbare lineare Abbildung

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

derart geben, dass für alle $x \in U$ gilt

$$|| \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^n} - J_f(x) \cdot A^{-1} || < 1. \tag{$*$}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\det(J_f(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$.
Hinweis: Nutzen Sie die Herleitung der Neumannschen Reihe aus der Vorlesung.

(b) Sei $U' \subset U$ offen. Zeigen Sie, dass die Bildmenge $f(U')$ offen ist.

(c) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(d) Folgen Sie aus (a)-(c) und einem Satz der Vorlesung, dass f ein Diffeomorphismus ist.

(e) Es seien $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wir betrachten eine Störung der Identität

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + \lambda\varphi(x, y), y + \lambda\psi(x, y))$$

Bestimmen Sie ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $|\lambda| < \varepsilon$ die Funktion f global umkehrbar ist.