Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
27.06.2007

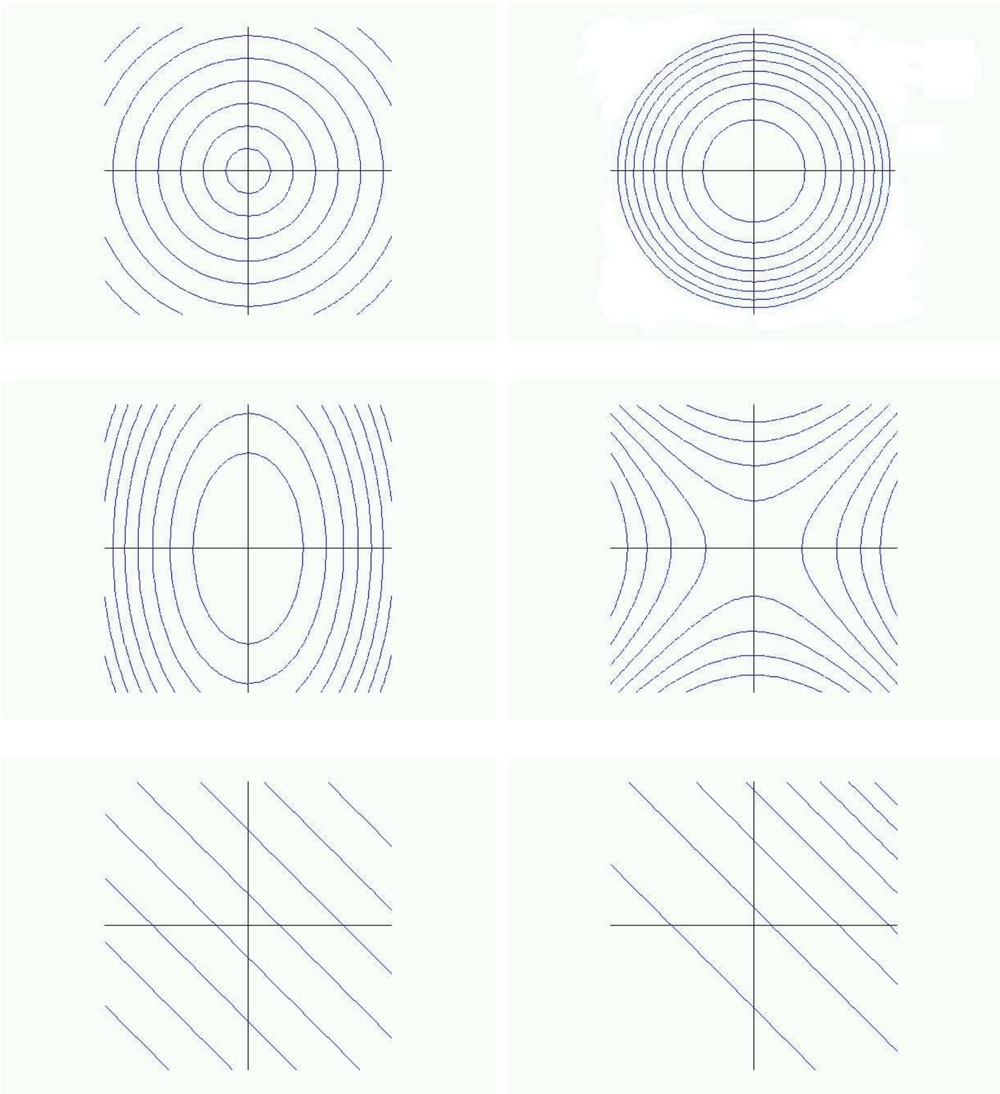
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 39 – Test:

Ordnen Sie den folgenden Funktionen die Niveaumengen zu.

$$\sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x^2-y^2\,, \quad x+y, \quad \sqrt{1-x^2-y^2}\,, \quad 2x^2+y^2, \quad e^{x+y}\,.$$



Für welche Funktion

- zeigt der Gradientenvektor in eine konstante Richtung,
- ist der Gradientenvektor parallel zu Vektor (x, y)?

Aufgabe 40 – Geometrie von Abbildungen:

Geben Sie für folgende Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ eine geometrische Deutung an. Bestimmen Sie die Fixpunkte dieser Operationen.

Bsp: Die Abbildung $(x, y) \mapsto (|x|, y)$ faltet die Ebene entlang y-Achse auf die rechte Halbebene. Die Menge der Fixpunkte ist die rechts Halbebene plus die y-Achse.

(i) $(x, y) \mapsto (x, 0)$

(ii) $(x, y) \mapsto (|x|, |y|)$

(iii) $(x, y) \mapsto (-y, x)$

(iv) $(x, y) \mapsto (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(v) $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$ für $(x, y) \neq 0$.

Aufgabe 41 – Umkehrsatz in $\mathbb{C}$:

Betrachten Sie die Abbildung von $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

(i) Kann der Umkehrsatz auf jedes z in $\mathbb{C}$ angewendet werden?

(ii) Erinnern Sie sich an die geometrische Deutung der Abbildung: Wenn z Argument φ und Betrag $|z|$ hat, was gilt dann fuer $|z|^2$? Was ist das Bild eines Strahles, der im Ursprung beginnt? Wenn der Strahl einmal um 0 rotiert, was macht dann das Bild?

(iii) Im Fall dass f in $f(z) = w$ umkehrbar ist, geben Sie den maximalen Radius r an, so dass f^{-1} auf $B_r(w)$ definiert ist.

Aufgabe 42 – Satz über implizite Funktionen (der lineare Fall):

Gegeben sei ein Gleichungssystem

$$Ap - b = 0, \tag{*}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^k$ und A ein $k \times (n + k)$ Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} & a_{k,n+1} & \dots & a_{k,n+k} \end{pmatrix},$$

oder in Blockmatrix-Notation $A = (A_X\, A_Y)$. Weiterhin sei

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k.$$

1. Geben Sie eine Bedingung an, sodass die Gleichung (*) lösbar ist und Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge $M = \{p \in \mathbb{R}^{n+k} : Ap - b = 0\}$.

2. Sei A_Y invertierbar. Schreiben Sie M als ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{k+n}$. Bestimmen Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, sodass der Vektorraum M als ein Graph darstellbar ist
$$M = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}^k\}.$$

3. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = 1, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad y \in \mathbb{R}$$
Geben Sie eine Darstellung wie in (2) an. Skizzieren Sie den Graphen von g.

4. Würde der Satz über implizite Funktionen ebenfalls die in (3) bestimmte Lösung liefern?