Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
13.06.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

9. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 31 – Test:

Finden Sie Beispiele für folgende Abbildungen

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat genau einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Rang} J_f(x_0) = 0$ und sonst $\mathrm{Rang} J_f(x) = 2$.

b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat genau eine Linie L (z.B die x-Achse) mit $\mathrm{Rang} J_f(x) = 1$ für alle $x \in L$.

Aufgabe 32 – Invertierbarkeit einer Abbildung:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

Aussage: *Das Gleichungsystem $f(x) = y$ hat eine eindeutige Lösung.* (A)

a) Formulieren Sie die Aussage (A) um anhand des Begriffs der inversen Abbildungen.

b) Sei f linear. Geben Sie eine Bedingung der linearen Algebra an, sodass die Aussage (A) gilt.

c) Gilt (A) für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$?

Aufgabe 33 – Extrema mit Nebenbedingungen:

Geben Sie drei positiven reellen Zahlen x, y, z an, sodass

a) $x + y + z = 12$ und

b) das Produkt xyz möglichst groß wird.

Hinweis: Bestimmen Sie die kritische Punkte der Funktion $f(x, y) := xy(12 - x - y)$ auf der offenen Dreiecke

$$\triangle := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0, \; y > 0, \; 12 - x - y > 0\}.$$

Nutzen Sie aus, dass f positiv auf $\triangle$ ist, und f auf dem Rand von $\triangle$ verschwindet, um ein Maximum im Inneren von $\triangle$ zu finden.
Finden Sie eine geometrische Interpretation für ihr Resultat!

Aufgabe 34 – Extrema von Funktionen mehrer Veränderlichen:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Der *Laplace-Operator* Δ ist definiert durch $\Delta f := \partial_1\partial_1 f + \ldots \partial_n\partial_n f$. Beweisen Sie:

a) Hat f in x ein lokales Maximum, so ist $\mathrm{Hess} f(x)$ negativ semidefinit.

b) Gilt $\Delta f(x) > 0$ für alle $x \in U$, so hat $f\big|_U$ kein lokales Maximum. (Hinweis: $\Delta f = \mathrm{Spur}(\mathrm{Hess} f)$ und Teil a))