Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
06.06.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 26 – Richtungsableitung:

Es sei $V = C([0,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf dem Einheitsintervall versehen mit der Supremumsnorm. Wie lautet die Richtungsableitung der Funktion $f \mapsto f^2$ in Richtung $h \in V$ am Punkt $f \in V$?

Aufgabe 27 – Wiederholung aus dem Kopf: Kettenregel in Koordinaten:

Es seien $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ differenzierbare Funktionen.
Beschreibe die Kettenregel $d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x)$ in den kanonischen Koordinaten aus dem Kopf, d.h. durch die Jacobimatrizen $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$ und $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{i,j}$. Notiere für zwei Matrizen $A \in \mathbb{C}^{l\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ die Formel für die Komponenten der Hintereinanderausführung dieser Abbildungen aus dem Kopf. Schreibe nun die Kettenregel in Koordinaten auf.

Aufgabe 28 – Lösung der Wärmeleitungsgleichung:

Zeige, dass die Funktion

$$F(x,t) := t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, d.h. sie erfüllt

$$\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ,$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Aufgabe 29 – Taylorpolynom:

Bestimme das Taylor-Polynom $T^2_{(1,1)}(h)$ der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

.

Aufgabe 30 – Extremwerte:

Bestimme die kritischen Punkte von

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)$$

und finde heraus, welche davon lokale Extremstellen sind.