Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
30.05.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

7. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 21 – Differential:

Es seien V, W endlichdimensionale normierte Vektorräume und $f : V \to W$ linear.

(a) Gib eine Formel an, die besagt, dass für alle $v \in V$ die Ableitung $df(v) : V \to W$ gerade durch f selbst gegeben ist.

(b) Kommentiere den folgenden Einwand: *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ die Identität, so ist $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ im Widerspruch zum oben gezeigten.*

Aufgabe 22 – Kettenregel:

Berechne die Jacobi-Matrix der Funktion $h := f \circ g$, mit

$$f(y_1, y_2, y_3) = (y_2 \sin y_3, y_1 + y_2) \qquad \text{and} \qquad g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2^2, x_1 x_2)$$

auf zwei verschiedene Arten:

1. Mit der Kettenregel.
2. Berechne zunächst h, dann differenziere.

Aufgabe 23 – Polarkoordinaten und Kettenregel:

Die Funktion

$$P : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

führt Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten über.

(a) Veranschauliche die Funktion P.

(b) Berechne $\frac{\partial}{\partial \varphi}(f \circ P)$ und $\frac{\partial}{\partial r}(f \circ P)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion bezeichne.

(c) Was bedeutet $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial r}$ anschaulich?

(d) Es sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y)^\top \mapsto x^2 + y^2$. Berechne $\frac{\partial}{\partial \varphi}(h \circ P)$ und $\frac{\partial}{\partial r}(h \circ P)$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 24 – Ein nützliches Werkzeug:

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, falls es für alle Punktepaare $p, q \in U$ eine differenzierbare Kurve $c\colon [0,1] \to U$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ gibt.
Sei U wegzusammenhängend und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeige, dass f konstant ist.
Hinweis: Betrachte die Funktion $F(t) = (f \circ c)(t)$. Wie erhält man sie anschaulich?

Aufgabe 25 – Operatornorm:

Im Folgenden betrachten wir immer die Operatornorm, die entsteht, wenn sowohl im Urbildraum als auch im Bildraum die euklidsche Norm verwendet wird.

(a) Skizziere die Bilder der Einheitskugel unter den folgenden linearen Abbildungen. Berechne die zugehörigen Operatornormen und beschreibe anschaulich, was die Operatornorm beschreibt.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne die Operatornorm einer komplexen $n \times n$-Diagonalmatrix. Beweise deine Behauptung. Achte darauf, den Beweis sauber aufzuschreiben.