



## 5. Tutorium zu Analysis II

### Aufgabe 14 – Länge von Kurven:

Berechne die Länge der folgenden Kurvenstücke. Skizziere  $f$  zuerst.

- $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ , wo  $r, c > 0$ .
- $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ .

#### Lösung:

(i): Diese Kurve ist eine *Helix*. Wegen  $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$  erhalten wir  $\|f'(t)\|^2 = r^2 + c^2$ . Also gilt

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = 2\pi \sqrt{r^2 + c^2}.$$

(ii): Wegen  $g'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$  erhalten wir  $\|g'(t)\| = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = 2 \cosh^2 t$ . Somit gilt

$$L(g) = \int_0^1 \sqrt{2} \cosh t dt = \sqrt{2} \sinh 1.$$

### Aufgabe 15 – Kurven in Polardarstellung:

Es sei  $r : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \infty)$  eine stetige Funktion, die stetig differenzierbar sei auf  $(0, 2\pi)$  und deren Ableitung beschränkt sei. Wir definieren weiter

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r(t) \cos t, r(t) \sin t).$$

1. Zeige, dass die Bogenlänge von  $\gamma$  gegeben ist durch

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt.$$

2. Skizziere das Bild von  $\gamma$  für  $r(t) = 1 + \cos t$  und berechne die Bogenlänge von  $\gamma$ .

#### Lösung:

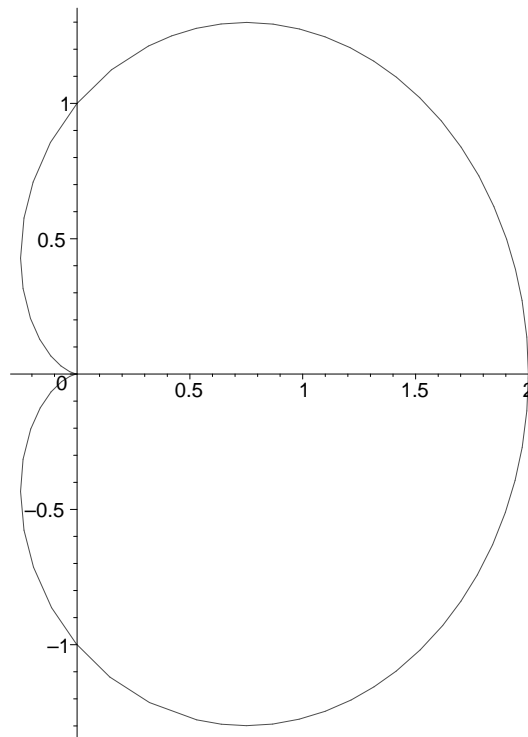
(i): Wegen

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \|(r(t) \cos t, r(t) \sin t)'\|^2 \\ &= \|(r'(t) \cos t - r(t) \sin t, r'(t) \sin t + r(t) \cos t)\|^2 \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt.$$

(ii):



(iii): Falls  $r(t) = 1 + \cos t$  haben wir  $r'(t)^2 + r(t)^2 = 1 + 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 + \cos t)$ .  
Daher

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \\
 &= 2\sqrt{2} [-2\sqrt{1-u}]_{-1}^1 \quad \text{subst. } u = \cos t \\
 &= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \\
 &= 8.
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 16 – Rennfahrer:

Ein Radrennfahrer durchfährt eine kreisrunde Bahn mit Innenradius  $r_1$  und Aussenradius  $r_2$  mit maximaler Geschwindigkeit, das heißt, die Haftreibungskraft ist gleich der Zentrifugalkraft.

Ist es besser für ihn, auf dem Innenradius oder auf dem Aussenradius zu fahren, wenn er die Kurve in möglichst kurzer Zeit durchfahren will? Achte darauf, Deine Lösung sauber aufzuschreiben.

*Hinweis:* Die Zentrifugalkraft ist bei Masse  $m$ , Geschwindigkeit  $v$  und Kurvenradius  $r$  gegeben durch  $F_Z = \frac{mv^2}{r}$ , die Haftreibungskraft ist gegeben durch  $F_H = mg\mu$ , wobei  $g$  der Erdbeschleunigung entspricht und  $\mu$  dem Haftreibungskoeffizienten. Wenn Du mit Kurven arbeitest, dann nutze aus, dass die momentane Geschwindigkeit in einem Kurvenpunkt durch den Betrag der Ableitung einer Kurve gegeben ist.

#### Lösung:

Der Weg auf dem Innenradius beträgt  $s_1 = \pi r_1$ , der auf dem Aussenradius  $s_2 = \pi r_2$ .

1. Lösungsmöglichkeit: Haftreibung = Zentrifugalkraft, also  $mg\mu = \frac{mv_i^2}{r_i}$ . Also ist  $v_i = \sqrt{g\mu r_i}$  und  $t_i = \frac{s_i}{v_i} = \frac{\pi r_i}{\sqrt{g\mu r_i}} = \frac{\pi}{\sqrt{g\mu}} \sqrt{r_i}$ . Da  $r_2 > r_1$  ist  $t_2 > t_1$  und somit ist die Innenbahn schneller.

2. Lösungsmöglichkeit:  $\gamma_i(t) = r_i(\cos w_i(t), \sin w_i(t))^T$  mit Polarkoordinaten. Somit ist die Ableitung von  $\gamma_i$  gegeben durch  $\gamma_i'(t) = r_i(-w_i'(t) \sin w_i(t), w_i'(t) \cos w_i(t))^T$ . Dann ist  $v_i = \|\gamma_i'\| = r_i \cdot w_i'(t) \cdot \sqrt{\sin^2 w_i(t) + \cos^2 w_i(t)} = r_i \cdot w_i'(t)$ .

Setzen wir wieder Haftreibung gleich Zentrifugalkraft, so erhalten wir wie oben  $v_i^2 = g\mu r_i$  und somit gilt  $r_i \cdot w_i(t)' = \sqrt{g\mu r_i}$ , also  $w_i(t)' = \sqrt{\frac{g\mu}{r_i}}$  und  $w_i(t) = \sqrt{\frac{g\mu}{r_i}} \cdot t$ .

Für welche  $t_i$  gilt nun  $\gamma_i(t_i) = (-r_i, 0)^T$ ?

$\gamma_i(t_i) = (-r_i, 0)^T$  genau dann, wenn  $\cos \sqrt{\frac{g\mu}{r_i}} \cdot t_i = -1$  und  $\sin \sqrt{\frac{g\mu}{r_i}} \cdot t_i = 0$ . Also muss  $\sqrt{\frac{g\mu}{r_i}} \cdot t_i = (2k+1)\pi$  sein. Betrachten wir den ersten Durchlauf der Kurve, so muss  $k=0$  sein, also ist  $t_i = \pi \sqrt{\frac{r_i}{g\mu}}$ . Da nun  $r_2 > r_1$ , folgt  $t_2 > t_1$ . Somit ist die Innenbahn schneller.

### Aufgabe 17 – Lissajous-Kurven:

Die sogenannten *Lissajous-Kurven* sind gegeben durch

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot \sin(w_1 t) \\ b \cdot \sin(w_2 t + \varphi) \end{pmatrix}, \quad a, b, w_1, w_2, \varphi \in \mathbb{R},$$

mit den Amplituden  $a$  und  $b$ , den Kreisfrequenzen  $w_1$  und  $w_2$  und der Phasenverschiebung  $\varphi$ .

Bei welcher Wahl von  $w_1, w_2$  ergeben sich geschlossene Kurven (das bedeutet, dass die Kurve immer wieder durchlaufen wird, Stichwort: periodisch)?

#### Lösung:

Damit sich eine periodische Kurve ergibt, müssen für verschiedene Zeiten  $t_1, t_2$  die x- und die y-Koordinaten gleich sein, bzw. sich modulo  $2\pi$  in der selben Koordinate befinden. Dies ergibt

$$w_1 t_1 = w_1 t_2 + k_1 \cdot 2\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

$$w_2 t_1 = w_2 t_2 + k_2 \cdot 2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Setze (5.2) in (5.1) ein, dann erhalten wir

$$w_1 \cdot \frac{w_2 t_2 + k_2 \cdot 2\pi}{w_2} = w_1 t_2 + k_1 \cdot 2\pi$$

bzw.

$$w_1 w_2 t_2 + w_1 k_2 2\pi = w_1 w_2 t_2 + w_2 k_1 2\pi,$$

was zu

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

führt.

Wenn also das Verhältnis von  $w_1$  zu  $w_2$  rational ist, dann ergibt sich eine geschlossene Kurve.