Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
03.05.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

4. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 9 – Stetigkeit I:

Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen X und Y.

1. Zeigen Sie, daß das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge A von Y abgeschlossen in X ist.

2. Ist das Bild $f(B)$ einer abgeschlossenen Teilmenge B von X auch immer abgeschlossen in Y?

Aufgabe 10 – Stetigkeit II:

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + y^4}$$

1. Ist die Funktion f stetig?

2. Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$?

Aufgabe 11 – Stetigkeit III:

1. Negiere das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit einer Funktion zwischen zwei metrischen Räumen.

2. Finde eine stetige bijektive Abbildung $f : [0, \infty) \to [0, 1)$.

3. Finde eine stetige bijektive Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to B_1(0)$.

Aufgabe 12 – de Morgansche Regeln im abzählbaren Fall:

Zeige für beliebige Mengen A_n mit $n \in \mathbb{N}$, dass

$$(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_i)^C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \text{und}$$
$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i)^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C.$$

Achte dabei besonders darauf, den Beweis sauber aufzuschreiben.

Aufgabe 13 – ...noch einmal Konvergenz:

Beweise für einen metrischen Raum (X, d) und eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ gilt, dass

1. $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist und dass

2. $(x_n)_n$ beschränkt ist.