Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.04.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 5 – Minitest:

Überlege kurz(!), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. (Der Minitest soll nicht mehr als **5 Minuten** in Anspruch nehmen.)

- ☐ Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist beschränkt.
- ☐ Schnitte offener Mengen sind immer offen.
- ☐ Für jede offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist das Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ abgeschlossen.
- ☐ Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}$ die offen und abgeschlossen sind.

Aufgabe 6 – Überdeckungen:

Sind die folgenden Mengensysteme Überdeckungen bzw. offene Überdeckungen (bezüglich der euklidschen Metrik)? Haben sie endliche Teilüberdeckungen?

(i) $X = [0,1]$, $U_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $U_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $U_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(ii) $X = [-1,1]$, $U_i = \{\frac{1}{i}\}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $U_0 = \{x \in X : x \neq \frac{1}{i}$ für $i \in \mathbb{N}\}$

(iii) $X = [0,1]$, $U_i = \{t \in \mathbb{R} : |t - i| < \varepsilon, t \in X\}$ für $i \in X$ und ein festes $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 7 – Offen, abgeschlossen, kompakt:

Entscheide, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ jeweils offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

$$(a)\ \mathbb{N}, \quad (b)\ [0,1), \quad (c)\ \bigcup_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}, 1), \quad (d)\ M = \{(-1)^n \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Aufgabe 8 – :

Skizziere die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\} \text{ und} \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \end{aligned}$$

und gib jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind. Bestimme außerdem jeweils die kleinste abgeschlossene Menge, die A bzw. B, C oder D enthält.