Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
18.04.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2. Tutorium zu Analysis II

Aufgabe 1 – Metriken auf $\mathbb{R}^n$:

Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|x\|$ die euklidsche Norm und $\mathrm{rund}(x)$ den Vektor, in dem alle Einträge von x abgerundet sind. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nun die folgenden Abbildungen. Welche der Abbildungen sind Metriken? Welche Eigenschaften einer Metrik sind gegebenenfalls nicht erfüllt?

$$
\begin{aligned}
d_1 :&\quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad d_1(x,y) = \|x-y\| \\
d_2 :&\quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad d_2(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
d_3 :&\quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad d_3(x,y) = \|x-y\|^2 \\
d_4 :&\quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad d_4(x,y) = \|\mathrm{rund}(x) - \mathrm{rund}(y)\|
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 – Topologie für verschiedene Metriken:

Betrachte erneut die Metriken d_1 und d_2 aus Aufgabe 1.

a) Wie sehen die Einheitskugeln im Fall $n = 2$ aus?

b) Ist die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ im Fall $n = 1$ konvergent? Wie sehen Folgen aus, die bezüglich d_2 konvergent sind? Konvergiert jede d_2-konvergente Folge auch bezüglich d_1?

c) Ist $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt? Ist die Einheitskugel der jeweils einen Metrik bezüglich der anderen beschränkt?

d) Ist $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen? Wie sieht es mit $(0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ aus? Wie sehen abgeschlossene Mengen bezüglich d_2 aus?

Aufgabe 3 – Vereinigungen abgeschlossener Mengen:

Finde eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, deren unendliche Vereinigung nicht abgeschlossen ist.
Hinweis: Du kannst Dich vom eindimensionalen Gegenbeispiel für die euklidsche Metrik inspirieren lassen.

Aufgabe 4 – vollständig gegenüber abgeschlossen:

Diskutiere mit Deiner Kleingruppe den Unterschied der Begriffe „vollständig" und „abgeschlossen" am Beispiel von $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$. Welcher der beiden Betriffe ist ein relativer Begriff, welcher ist nicht relativ?
Hinweis: $\mathbb{Q}$ ist mit der euklid'schen Metrik ausgestattet ein metrischer Raum.