Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Y.He, J. Prasiswa
17.07.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wiederholungsaufgaben zu Analysis II

Aufgabe 1 – Elementare Topologie:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Eine offene Menge kann nicht abgeschlossen sein.

b) Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.

c) Beliebige Durchschnitte kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind kompakt.

Aufgabe 2 – Kompaktheit:

Gegeben seien kompakte Mengen $K_1, \ldots, K_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^n K_i$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 3 – Vollständigkeit:

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige: X ist vollständig.

Aufgabe 4 – Stetige Funktionen auf Kompakta:

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ stetig und injektiv.

a) Zeigen Sie, dass $f^{-1}\colon f(K) \to K$ stetig ist.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn K nicht kompakt ist.

Aufgabe 5 – Kugelkoordinaten:

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$S \,:\, D = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\cos\varphi\cos\psi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\psi) \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Zeige, dass $\|S(\varphi, \psi)\| = 1$.

b) Skizzieren Sie folgende Kurven

- $[0, 2\pi] \ni \varphi \mapsto S(\varphi, \psi)$ für ein festes $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni \psi \mapsto S(\varphi, \psi)$ für ein festes $\varphi \in [0, 2\pi]$.

c) Berechnen Sie $J_S(\varphi, \psi)$. Welchen Rang hat $J_S(\varphi, \psi)$?
Hinweis: Auf dem Rand von D existieren die partiellen Ableitungen, da S auf ganz $\mathbb{R}^2 \supset D$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 6 – Richtungsableitung:

Berechne die Richtungsableitung $D_v f$ der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ für $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ im Punkt $(x,y) = (0,0)$.
Für welche Werte von α is $D_v f(0,0)$ maximal?

b) $f(x,y,z) = x^3 + e^y \sin z$ für $v = \left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$ im Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7 – Richtungsableitung (schwer):

Sei $g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$g(-x) = -g(x).$$

Wir definieren eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} ||x|| g\left(\dfrac{x}{||x||}\right) & \text{für} \quad x \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad x = (0,0). \end{cases}$$

a) Geben Sie ein Beispiel für $f \neq 0$.

b) Zeigen Sie für ein allgemeines f, dass in $(0,0)$ alle Richtungsableitungen $D_v f$ existieren.

c) Sei $g(0,1) = g(1,0) = 0$. Zeigen Sie, dass f genau dann differenzierbar ist, wenn $g \equiv 0$.

Aufgabe 8 – Kettenregel:

Eine Hummel fliegt entlang der Kurve

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t, \sin t, t)$$

In $\mathbb{R}^3$ sei folgende Temperaturverteilung gegeben

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ T(x,y,z) = (x^2 + y^2) e^{-z^2}.$$

a) Berechnen Sie die Ableitung von T entlang der Kurve für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Für welchen Parameterwert t ist die Änderung am größten?

c) Welchen Weg legt die Hummel zwischen $t_0 = 0$ und $t_1 = 5\pi$ zurück?

Aufgabe 9 – Gasgleichung:

Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$, wobei c konstant ist. Der Einfachheit halber seien alle Größen $P, V, T, c \neq 0$. Zeige, dass für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

besteht (d.h. das Produkt hat nicht den Wert 1, den man durch 'Kürzen' erhalten würde).

Aufgabe 10 – Diffeomorphismen:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen C^1-Diffeomorphismen sind.

a) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto z^2$

c) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \lambda x + a$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$

Aufgabe 11 – Dreieck im Kreis:

Gesucht ist ein dem Einheitskreis einbeschriebenes Dreieck, dessen Flächeninhalt maximal ist. Seine Eckpunkte seien$(0,1)$, $(\cos\alpha\ \sin\alpha)$, $(\cos\beta, \sin\beta)$.

Aufgabe 12 – Schwerpunkt:

Gegeben seien k Punkte $a_1, ..., a_k$ in $\mathbb{R}^n$. Berechnen sie ihren *Schwerpunkt* s, d.h. denjenigen Punkt für den

$$\sum_{i=1}^{k} \|p - a_i\|^2$$

minimal ist.

Aufgabe 13 – Implizite Funktionen:

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^{xy} + x^2 + 2y^2$.

a) Bestimmen Sie die Niveaumenge $M_c = f^{-1}(c)$ für $c < 1$.

b) Bestimmen Sie die Niveaumenge $M_1 = f^{-1}(1)$.

c) Bestimmen Sie alle Punkte $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die man die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y lokal in der Form $y = g(x)$ auflösen kann.

Aufgabe 14 – Normalenraum:

Gegeben eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^{n+k}$ und eine Karte $F\colon U \to V$ (Diffeomorphismus) zwischen den offenen Mengen U, V, mit V offener Umgebung von $p \in M$.

a) Sei M nun ein Graph, beweise die in der Vorlesung gegebene Darstellung von T_pM und N_pM mit Hilfe der Formel $T_pM = dF_p\big(\mathbb{R}^n \times \{0\}\big) \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $T_pM = dF(\mathbb{R}^n \times \{0\})$.
Geben Sie ein Beispiel dafür, dass das Bild des Urbild-Normalenraums $\{0\} \times \mathbb{R}^k$ unter dF nicht mit dem Normalenraum N_pM der Untermannigfaltigkeit übereinzustimmen braucht.

Aufgabe 15 – Tangentialraum $\mathsf{O}(n)$ (schwer):

Sei

$$f\colon \mathsf{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathsf{Sym}(n),\ A \mapsto A^\top A.$$

In der Vorlesung wurde mit Hilfe dieser Abbildung gezeigt, dass $\mathsf{O}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathsf{M}(n)$ ist.
Es sei $\mathsf{o}(n) = \{A \in \mathsf{M}(n)\colon A^\top = A\}$ die Menge der schiefsymmerischen Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass $T_P\mathsf{O}(n) = P\mathsf{o}(n) = \{A \in \mathsf{M}(n)\colon \exists B \in \mathsf{o}(n) \text{ mit } A = PB\}$.

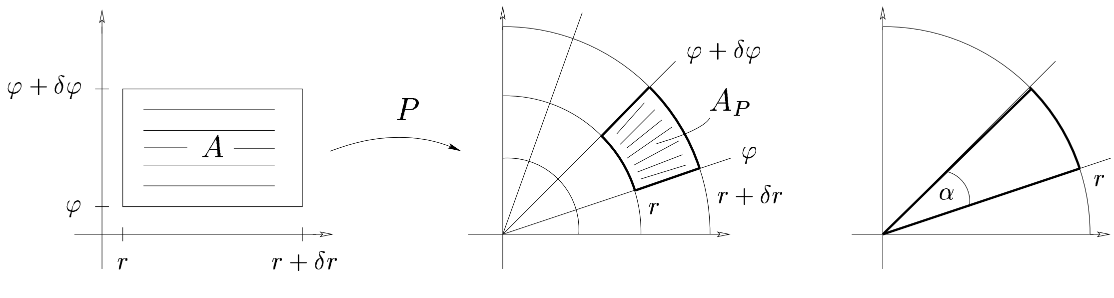
b) Berechnen Sie als Beispiel den Fall $n = 2$ und $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und überzeugen Sie sich, dass $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}\Big|_{t=0} \in T_{Id}\mathsf{O}(2)$.

Aufgabe 16 – Deutung von $\det J$ für Polarkoordinaten:

Wir betrachten die Polarkoordinaten-Abbildung

$$P(r,\ \varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

a) Berechne die Funktionaldeterminate $\det J_P(r,\ \varphi)$ dieser Abbildung.



Wir wollen nun $\det J_P(r,\ \varphi)$ -als Maß der Volumenverzerrung- graphisch ermitteln:

b) Wie gross ist ist der elementargeometrische Flächeninhalt A_p des im mittleren Bild schraffierten Bereichs?
Hinweis: Der Inhalt des im rechten Bild markierten Bereichs ist $\frac{\alpha}{2\pi}\pi r^2 = \frac{\alpha}{2}r^2$.

c) Berechne nun den Grenzwert der Flächenverhältnisse

$$\lim_{\delta r \to 0,\ \delta\varphi \to 0} \frac{A_p}{A}$$

wobei A der Inhalt des schraffierten Rechtecks links ist. Vergleiche Dein Ergebnis mit dem aus Teil a).

Vom 1. bis zum 15. August werden Feriensprechstunden angeboten, mehr dazu auf der Homepage der Veranstaltung.