



12. Übung zu Analysis II

Aufgabe 54 – Volumen der Halbkugel:

Gegeben die obere Halbkugel

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

- a) Stelle die Halbkugel als Graph $z = f(x, y)$ dar. Sei x gegeben, für welches y -Intervall ist der Graph definiert?
- b) Berechne das Volumen der Halbkugel.
Hinweis: Du darfst annehmen, dass f stetig durch 0 auf das Einheitsquadrat fortgesetzt ist.
Tipp zum Lösen des Integrals: Substituiere $\sin t = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

Aufgabe 55 – Monotonie des Integrals:

- a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Beweise die Aussage: Ist $f \leq g$ für zwei Funktionen $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} g(x) dx.$$

- b) Beweise oder widerlege: Sind $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ Funktionen mit $f \leq g$ und $f \not\equiv g$, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx < \int_{[a,b]} g(x) dx.$$

Hinweis: Betrachte $h := g - f$.